EDUCACIÓN
SECRETARÍA DE EDUCACIÓN PÚBLICA

SEP DGETI

$\int$ Cálculo Integral

Manual del alumno

Aprendizajes Esenciales

Academia Nacional de Matemáticas

Periodo escolar
2021-2022

Índice

Propósito

Desarrollar las competencias necesarias para el aprendizaje de las Matemáticas en los estudiantes de Bachillerato Tecnológico, en los planteles de la DGETI de la República Mexicana y que les permita alcanzar el perfil de egreso que exigen los nuevos tiempos, enfrentando la contingencia sanitaria que continúa en el país por SARS COV-2, que requiere de su permanencia en casa. Asimismo, cada manual está diseñado para servir de apoyo al docente titular de las asignaturas para propiciar en el alumno, aún en la distancia, el interés de dirigir su automotivación hacia el aprendizaje autodidacta de los contenidos de los programas de estudio vigentes de las asignaturas de Matemáticas en el plan nacional educativo, a través de la construcción de sus propios conocimientos y la aplicación pertinente de éstos en su contexto personal y su vida cotidiana, desde una óptica crítico-analítica del pensamiento individual.

A consecuencia de esta contingencia sanitaria, y por indicaciones de nuestras autoridades educativas de la DGETI, el manual se sigue enfocando en las actividades de Aprendizajes Esenciales determinados por la Academia Nacional de Matemáticas. En este semestre, se contempla la posibilidad de trabajar de manera híbrida o semi presencial, en los planteles en los que se reúnan las condiciones necesarias y siguiendo los protocolos establecidos por la Secretaría de Salud y de Educación para hacerlo, de lo contrario, continuaremos de manera virtual. Este manual está diseñado, principalmente, para los alumnos que no cuentan con los recursos tecnológicos; pero también, para aprender de manera virtual y/o presencial.

Marco teórico

Los seres humanos somos capaces de conocer el mundo a través del lenguaje, del análisis lógico-matemático, de la representación espacial, del pensamiento musical, del uso del cuerpo para resolver problemas o hacer cosas, de la propia interpretación del universo, la interrelación con los demás individuos y de una auto comprensión de nosotros mismos. Donde los individuos se diferencian es en el nivel e intensidad de sus habilidades y en las formas en que recurre a esas mismas y se les combina para llevar a cabo diferentes labores, para solucionar diversos problemas y progresar en distintos ámbitos.

Las personas aprenden, representan y utilizan el saber de muchos y de diferentes modos, estas diferencias desafían al sistema educativo, que hoy en día lucha por contraponerse a las ideas erróneas de que todo el mundo puede aprender los mismos conocimientos, las mismas disciplinas y del mismo modo, y que basta con una medida uniforme y universal para poner a prueba el aprendizaje de los alumnos.

Los procesos de aprendizaje de las matemáticas, requieren de estrategias que permitan al alumno que las competencias que son adquiridas en la escuela, se sitúen en un ambiente cotidiano para relacionar, interpretar, inferir y aplicar los saberes a la resolución de problemas.

El desarrollo de habilidades, destrezas y actitudes se relaciona directamente con las condiciones que se deben dar para lograr que los aprendizajes en el estudiante sean significativos y lo más funcional posible.

El proceso de evaluación de las competencias consiste en utilizar los medios que permitan a los alumnos reconocer si los esquemas de actuación aprendidos le son de utilidad, a tal grado que le sirvan para intervenir correctamente ante una situación problemática planteada en la cotidianidad.

Marco referencial

Al analizar los procesos de aprendizaje de las matemáticas, es posible percatarse que los alumnos han experimentado una serie de estrategias por parte de los docentes para que las competencias las transfieran en situaciones de la vida real. Esto exige relacionar, interpretar, inferir, interpolar, inventar y aplicar los saberes a la resolución de problemas, mediante la intervención en la realidad reflexionando y actuando sobre la acción y reaccionando con responsabilidad ante situaciones imprevistas o contingentes. El aprendizaje por competencias está directamente relacionado con las condiciones que deben darse para que los aprendizajes sean los más significativos, situados y funcionales posibles.

La evaluación del aprendizaje de competencias responde a la evaluación de contenidos; pero no toda la evaluación está referida a ello. Si consideramos que la evaluación es un aspecto complejo donde convergen diferentes dimensiones, entonces, debemos considerar que están implicados procesos de evaluación también complejos.

El proceso de evaluación de las competencias consistirá en utilizar los medios que permitan reconocer si los esquemas de actuación emprendidos por el estudiante pueden serle de utilidad para superar situaciones reales en contextos concretos, lo más aproximados a la realidad; para evaluarla, es necesario tener datos fiables sobre el grado de aprendizaje de cada estudiante con relación a la competencia implicada, para ello se requiere el uso de instrumentos y medios diversos en función de las características propias de cada competencia y los distintos contextos donde ésta debe o puede llevarse a cabo.

Dado que las competencias están constituidas por uno o más contenidos de aprendizaje, es necesario identificar los indicadores de logro para cada uno de ellos, pero integrados o que se puedan integrar en la competencia correspondiente y el medio para conocer el grado de su aprendizaje será la intervención del estudiante ante la situación problemática planteada. La evaluación, bajo el enfoque de competencias, no solo implica evaluar el resultado del aprendizaje del alumno, también el proceso de enseñanza-aprendizaje, por lo que conlleva a que también, en paralelo, el facilitador va desarrollando, aprendiendo y evaluando bajo el enfoque de competencias, su propia praxis educativa.

Características del curso

El curso tal y como aparece en el manual, pretende abarcar los aprendizajes esenciales que le sean útiles al alumno. En virtud de las medidas sanitarias, derivadas de la actual pandemia del SARS-CoV-2, las autoridades de la Secretaría de Educación Pública del país, han considerado, la apertura de las clases, y siguiendo con la nueva normalidad, en el actual ciclo escolar, lo que se denomina *modalidad híbrida* o *semipresencial*. Continuar con la actividad académica a distancia en los diferentes niveles educativos, aprovechando los medios electrónicos actuales para que docentes y alumnos puedan desarrollar su proceso académico de manera digital y a la vez contar con la posibilidad de poder tener clases presenciales, con una porción de estudiantes, en aquellos planteles que reúnan las condiciones necesarias de recibir personal y alumnado, bajo las siguientes condiciones obligatorias: a) señalización de semáforo verde, b) esquema completo de vacunación de los involucrados y c) permiso voluntario de asistencia al plantel por parte de los padres de familia.

Los manuales están estratégicamente diseñados para propiciar la participación activa, la cual implica un compromiso entre el facilitador y los alumnos para alcanzar los objetivos del curso. Asimismo, las etapas de apertura, desarrollo y cierre, así como las actividades de contextualización y transversalidad y el tipo de ejercicios, permitirá crear las condiciones para estimular un trabajo en el que prevalezca la intención comprometida de cada uno de los participantes, para analizar y extraer las características más relevantes de las situaciones problemáticas; discutir y encontrar formas de solución de los problemas y elegir, entre ellas, las más eficaces, así como fundamentar, en todo momento, el porqué de la estrategia de solución.

El propósito fundamental es trabajar con estrategias que permitan crear las condiciones que propicien aprendizajes significativos, donde lo más importante radica en ser consciente de lo que se hace y para qué se hace, y no sólo de la obtención de un resultado concreto al solucionar un problema matemático en particular. En esta perspectiva, el docente está comprometido a supervisar, de manera permanente, el trabajo de sus alumnos, orientar y retroalimentar los contenidos que se requieran en plenarias, o en especial individualización, respetando los procesos de discusión y los argumentos que conduzcan al entendimiento y solución de los ejercicios, atender las dudas individuales y propiciar, siempre, la participación activa y comprometida de los estudiantes.

Esta obra se hará llegar a los alumnos por los medios que dispongan en el contexto de cada región del país, tratando de abarcar la totalidad de la población de estudiantes de la DGETI. Para ello, en los planteles se establecerán los mecanismos para que se lleve a cabo una interacción favorable entre maestros y alumnos, a fin de dar seguimiento a los avances que tengan los jóvenes, y establecer los criterios de evaluación que se consideren viables de acuerdo con las circunstancias de cada región, pero sobre todo, a las circunstancias de los alumnos, en el marco de la contingencia actual.

Recomendaciones para la impartición del curso

Este material contempla en su estructura una serie de estrategias didácticas y ejercicios con un grado de complejidad gradual ascendente, cuyo principal propósito es que los procedimientos para su resolución y respuestas sirvan de parámetro a todos los involucrados en el proceso educativo, para emitir una opinión basada en el análisis de su alcance e importancia de desarrollarse siguiendo un razonamiento lógico-matemático.

Debido a la trascendencia académica del curso-taller sugerimos tomar en cuenta las siguientes recomendaciones:

1. En la medida de lo posible, que los docentes que impartan el curso posean las competencias necesarias, preparación pedagógica, dominio de los temas y estabilidad emocional, que le permitan desempeñarse en este importante puesto social.

2. Los ejercicios tienen un grado de complejidad ascendente, por lo que es recomendable que el docente informe a los alumnos sobre el impacto que tiene cada habilidad en el aprovechamiento escolar; de igual forma, es pertinente que si observa en el grupo dificultades en alguna habilidad, la ejercite hasta que se domine, o en su defecto, brinde la oportunidad al estudiante de desarrollarla en otro espacio (plataforma Khan Academy, por ejemplo), o la estrategia que el considere pertinente.

3. Se efectuará el registro de las calificaciones que cada alumno obtenga en los diversos contenidos, para que al final del curso sea entregada de manera informativa a los alumnos como una evidencia que legitimó su calificación final del curso.

4. El docente podrá realizar clases por video conferencias, grabar sus propios videos explicativos, proporcionar links de videos y textos explicativos de los temas, tutoriales, etc.; con el propósito de que el estudiante tenga los recursos suficientes para la adquisición de las competencias y aclaración de posibles dudas en los contenidos.

5. Proporcionar al alumno y, si es posible, a los padres de familia, a través de las redes sociales (como WhatsApp), los aspectos y ponderaciones a considerar en la evaluación, así como, su promedio parcial y final de manera oportuna, para que los alumnos tengan el tiempo de prepararse y regularizarse, en caso de ser necesario.

6. Se debe tener consideración y empatía con aquellos alumnos que no tengan el recurso de conectarse diariamente y tratar de localizarlos con medios que estén al alcance de sus posibilidades y dándoles la oportunidad de trabajar o regularizarse en las condiciones que le favorezcan. Como, entregar tareas en un punto de reunión física y siguiendo las consideraciones de la sana distancia por la contingencia.

Competencias para desarrollar en el curso.

COMPETENCIA	ATRIBUTOS
1. Se conoce y valora así mismo y aborda problemas y retos teniendo en cuenta los objetivos que persigue.	1. Enfrentan las dificultades que se le presentan y es consciente de sus valores, fortalezas y debilidades.
	2. Identifica sus emociones, las maneja de manera constructiva y reconoce la necesidad de solicitar apoyo ante una situación que lo rebase.
4. Escucha, interpreta y emite mensajes pertinentes en distintos contextos, mediante la utilización de medios, códigos y herramientas apropiadas.	1. Expresa ideas y conceptos mediante representaciones lingüísticas, matemáticas o gráficas.
	2. Aplica distintas estrategias comunicativas según quienes sean sus interlocutores, el contexto en que se encuentra y los objetivos que persigue.
5. Desarrolla innovaciones y propone soluciones a problemas a partir de métodos establecidos.	1. Sigue instrucciones y procedimientos de manera reflexiva, comprendiendo cómo cada uno de sus pasos contribuye al alcance de un objetivo.
	6. Utiliza las TIC's para procesar e interpretar información.
8. Participa y colabora de manera efectiva en equipos diversos.	2. Aporta puntos de vista con apertura y considera los de otras personas de manera reflexiva.
	3. Asume una actitud constructiva, congruente con los conocimientos y habilidades con los que cuenta dentro de distintos grupos de trabajo.

Introducción

El propósito de la Secretaría de Educación Pública, es que los servicios educativos, en todos los niveles, lleguen en lo posible, y de manera efectiva, a todos los alumnos del país, priorizando la atención a aquellos que por sus diversas condiciones, no les es posible contar con los medios y herramientas necesarias para trabajar con la modalidad en línea, y serán ellos, principalmente, a los que se procure atender de manera presencial en las aulas.

En sintonía con esta labor, la Academia Nacional de Matemáticas se dio a la tarea de efectuar los ajustes necesarios a los manuales elaborados por los docentes integrantes de este órgano colegiado, con el objetivo de abarcar pertinentemente los temas de los aprendizajes esenciales contenidos en los programas vigentes de bachillerato de la DGETI, en condiciones de confinamiento social, y enfocando esfuerzos por rescatar a los estudiantes con dificultad de trabajar en la modalidad a distancia.

Estos manuales contienen materiales y actividades enfocadas a trabajar en escenarios académicos tanto virtuales como presenciales, generando una estrategia didáctica que les permita a los estudiantes de bachillerato adquirir las competencias necesarias, a partir de la recuperación de los conocimientos previos y la construcción de aprendizajes elementales y así continuar con su desarrollo y formación académica a través de la adquisición del sentido numérico, con el cual pueda transitar eficientemente hacia el manejo y comprensión de la abstracción que da el conocimiento lógico-matemático.

La construcción del conocimiento deberá ser a la vez individual y colaborativa, donde todos los estudiantes tengan la oportunidad de adquirir los mismos conocimientos, según su propia percepción de la realidad.

Los manuales están estructurados en secciones que incluyen actividades de apertura, desarrollo y cierre como estrategias sistemáticas que le permitan al estudiante construir su conocimiento personal, adueñándose del manejo de las herramientas académicas y recursos intelectuales esenciales que le serán útiles en la adquisición de competencias y conocimientos formales posteriores, para llegar a alcanzar su formación profesional y poder intervenir en los cambios que la sociedad actual le demande.

¡Somos orgullosamente DGETI!

Justificación

Estamos conscientes que, estos tiempos que les ha tocado vivir a los estudiantes de nuestros planteles de todo el país son particularmente difíciles. Tener que enfrentarse a las circunstancias de la nueva modalidad de educación a distancia, representa para la mayoría de ellos, un verdadero problema en el afán de comprender los contenidos que marcan los programas de estudio vigentes en todos los niveles. Contar con los medios de comunicación digitales adecuados en casa, aunado a las dificultades económicas que muchos de nuestros alumnos atraviesan, se ha convertido en un complicado reto para ellos y sus familias.

Conscientes de esta situación, las autoridades de la Dirección General de Educación Tecnológica Industrial y de Servicios y la Academia Nacional de Matemáticas de este subsistema, se han dado a la tarea de diseñar estrategias que favorezcan en todo lo posible la enseñanza de los temas de matemáticas, que le serán útiles para la continuación de sus estudios en este nivel bachillerato y los que el joven emprenda a continuación, en la búsqueda de su preparación y formación profesional.

Si bien es cierto, las dificultades de comprensión y habilidades en matemáticas tiene sus orígenes en un sin número de ambientes y condiciones en el individuo, éstas sí se reflejan en el aprovechamiento de los alumnos en bachillerato y por consecuencia en niveles posteriores, por lo que se hace necesario emprender acciones académicas dirigidas a subsanar en lo posible algunas de esas inconsistencias.

Es por eso, que los manuales elaborados por dicha academia, están diseñados para apoyar el esfuerzo en la práctica docente para colaborar con los alumnos, detonando en ellos la capacidad de observación, globalización, jerarquización, regulación de su propia comprensión, y por consecuencia, sus competencias matemáticas, ya que es importante la sistematización de los procesos académicos y su motivante aplicación, cuya utilidad se verá reflejada, no sólo en el contexto académico, sino en cualquier ámbito de su vida cotidiana.

Este material es el resultado de la experiencia de los maestros que lograron concentrar los contenidos de los programas de las asignaturas de Álgebra, Geometría Analítica y Cálculo Integral y trabajar en sólo los aprendizajes esenciales, con el propósito de ofrecer a los alumnos las herramientas prioritarias para su formación académica en este nivel y sus estudios posteriores, evitando así el exceso de trabajo escolar en su hogar.

Unidad I. Integral Definida

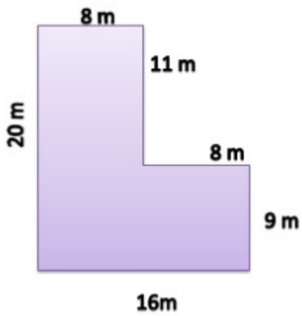
1.1 Cálculo de Áreas por Aproximación

Introducción

Seguramente recordarás cómo se calculan áreas de superficies geométricas regulares,

como cuadrados, rectángulos, circunferencias, trapecios, etc., pues existen fórmulas sencillas que desde estudios anteriores las sabemos de memoria. Basta con conocer algunas de las dimensiones de sus elementos, lados o contornos, la cuales las llamamos bases, alturas, apotemas, etc.

Incluso, de alguna manera o de otra podríamos calcular algunas áreas de figuras no regulares o compuestas, dividiéndola en figuras más simples, fáciles de calcular su área y luego sumarlas o restarlas. Por ejemplo, la siguiente:



Tiene muchas maneras de resolverse, ¿verdad? Describe como lo harías, escribe los cálculos y la respuesta correcta:

Procedimiento: Área Total = __________

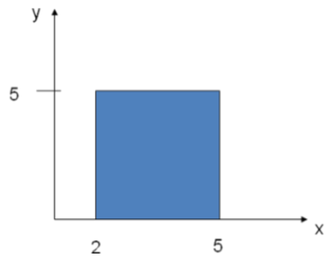
Por supuesto que existen otras figuras más complejas, las cuales, no es tan sencillo calcular su área, ni siquiera segmentarlas en figuras simples.

Precisamente el estudio del campo de las matemáticas, conocida como Cálculo Integral, está relacionado al cálculo de áreas que ya son de tu conocimiento. Si es cierto, que para ello, vamos a necesitar la aplicación de conocimientos previos de Geometría Analítica y Cálculo diferencial, dichos problemas son demasiado interesantes, pues nos aclararán algunas de las aplicaciones de esta área de las matemáticas, herramienta de los estudios superiores como la ingeniería (civil, química, mecánica, etc.), arquitectura, medicina, diseño gráfico, etc.

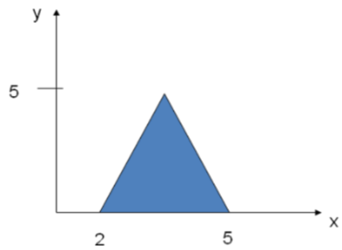
Actividades de Apertura

Realiza los siguientes ejercicios:

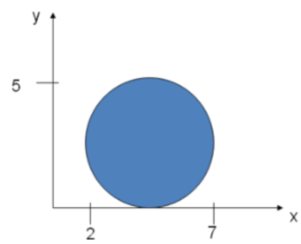
1. ¿Cuál es el área de las siguientes figuras?



Área=

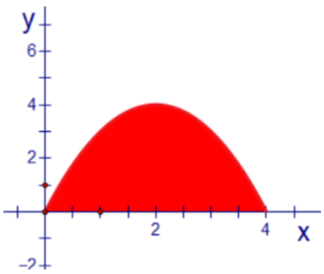


Área=



Área=

2. ¿Cuál es el área de la siguiente figura?

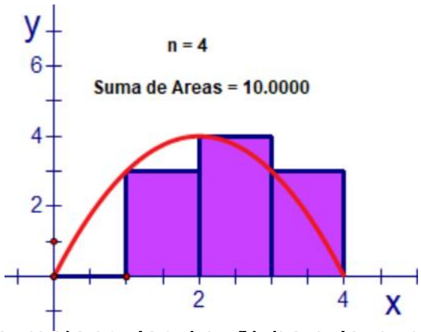


Área (aproximada)=

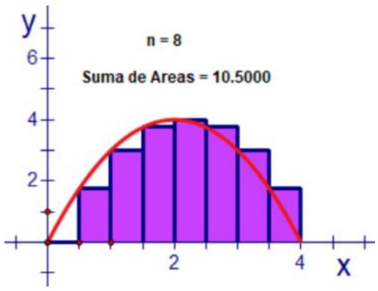
Si por ahora no pudiste responder con exactitud a este ejercicio, no te preocupes. Esto es precisamente una de las áreas de aplicación del Cálculo Integral. A lo largo de las siguientes actividades, iremos construyendo paso a paso la solución a este tipo de problemas y sus aplicaciones en la vida cotidiana.

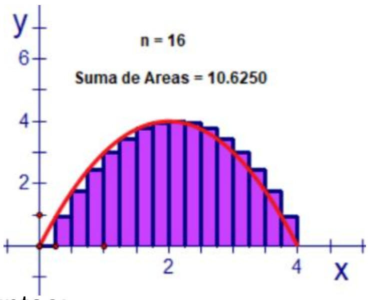
Actividades de Desarrollo

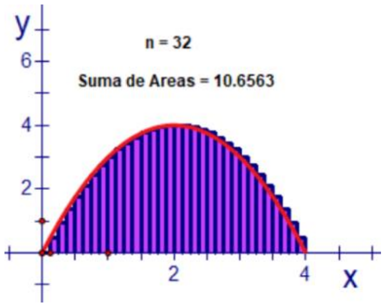
Una forma de estimar el valor del área anterior es aproximándonos con figuras geométricas, cuyo cálculo de área es más sencillo, por ejemplo, si partimos el eje x en cuatro partes iguales y dibujamos rectángulos que se inscriban bajo la curva tendremos la siguiente figura.



Se han dibujado cuatro rectángulos (**n=4**) bajo la curva, que se cierran en su parte superior, por su extremo izquierdo, (por lo que el de la izquierda no se observa al tener una altura de cero). Si se suman las áreas de los cuatro rectángulos tendremos una primera aproximación del valor del área de la figura original. Observa que, el ancho de cada rectángulo es igual, por lo que solo difieren en la altura. Para este caso, *la suma de las áreas de los rectángulos es de **10***; trata de realizar los cálculos para comprobar. Sucesivas aproximaciones consistirían en ir aumentando el número de rectángulos (**n**) inscritos en la figura. Observa los cambios en el área total de los rectángulos cuando éstos se incrementan en número.







Contesta las siguientes preguntas:

1. A medida que aumentamos el número de rectángulos, ¿qué cambios se producen en el ancho de éstos?

   ____ .

2. A medida que aumentamos el número de rectángulos, ¿qué cambios se producen en la suma de sus áreas?

   ____ .

3. ¿Cuánto mide el ancho de la figura con respecto al eje x?

   ____ .

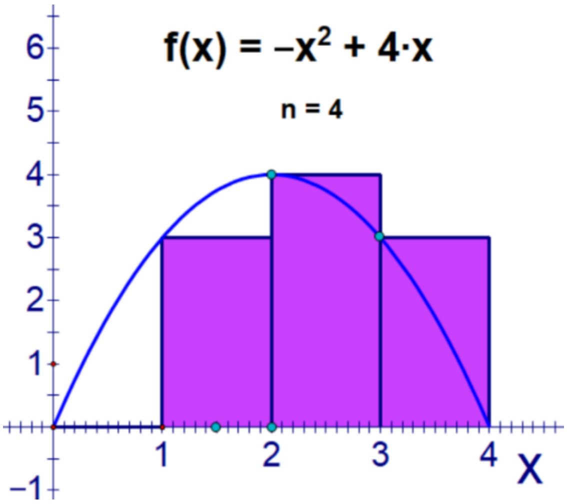
4. ¿Cuándo se emplean 4 rectángulos, ¿cuánto mide el ancho de cada uno? _____

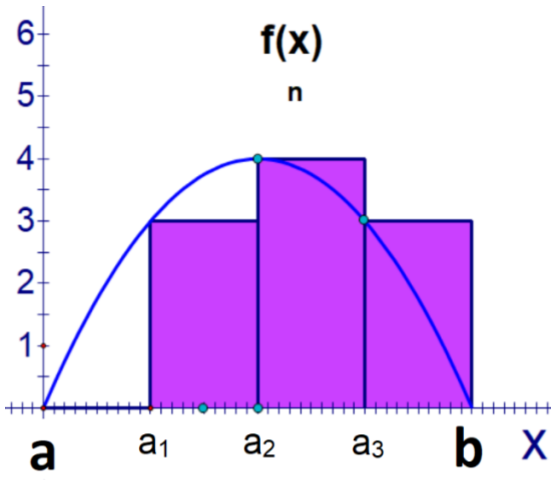
5. ¿Cuándo se emplean 8 rectángulos, ¿cuánto mide el ancho de cada uno? _____

6. ¿Cómo se puede calcular el ancho de los rectángulos, una vez que se conoce en cuántos se va a particionar la figura? _____

En el cálculo de áreas por aproximación, es conveniente representar algunos procedimientos mediante fórmulas sencillas, que permitan realizar la actividad de una manera más rápida y segura. Ahora te mostraremos, paso a paso, el cálculo del área aproximada para el primer caso, donde se emplearon 4 rectángulos.

Caso Particular	Caso General



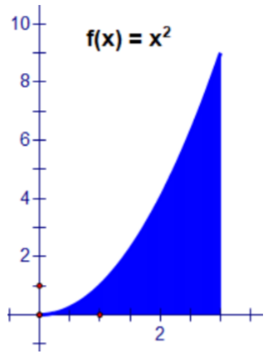


Calcula en intervalo sobre el eje x de la gráfica de la función. **Intervalo** $= \mathbf{4 - 0 = 4}$ Se resta el valor menor al mayor.	Calcula en intervalo sobre el eje x de la gráfica de la función. **Intervalo** $= \boldsymbol{b - a}$ Se resta el valor menor al mayor.
Calcula el ancho de cada rectángulo. $\Delta x = \frac{4}{4} = 1$ El ancho total del gráfico, entre el número de rectángulos en que va a dividirse.	Calcula el ancho de cada rectángulo. $\Delta x = \frac{b-a}{n}$ El ancho total del gráfico, entre el número de rectángulos en que va a dividirse.

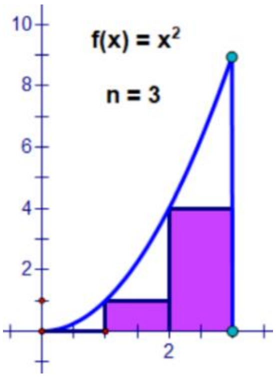
Determina los valores de los extremos izquierdos de cada rectángulo. $x = 0, 1, 2 \text{ y } 3$ Desde donde se medirá el ancho de cada rectángulo.	Determina los valores de los extremos izquierdos de cada rectángulo. $x = a, a_1, a_2, a_3$ Desde donde se medirá el ancho de cada rectángulo.
Calcula la altura de cada rectángulo. $f(x) = -x^2 + 4x$ $f(0) = -(0)^2 + 4(0) = 0$ $f(1) = -(1)^2 + 4(1) = 3$ $f(2) = -(2)^2 + 4(2) = 4$ $f(3) = -(3)^2 + 4(3) = 3$ Se sustituyen los valores anteriores en la función.	Calcula la altura de cada rectángulo. $f(x)$ $f(a)$ $f(\mathrm{a}_1)$ $f(\mathrm{a}_2)$ $f(\mathrm{a}_3)$ Se sustituyen los valores anteriores en la función.

Calcula el área de cada rectángulo $A = (base)(altura)$ $A_1 = (1)(0) = 0$ $A_2 = (1)(3) = 3$ $A_3 = (1)(4) = 4$ $A_4 = (1)(3) = 3$	Calcula el área de cada rectángulo $A = (base)(altura)$ $A_1 = (\Delta x)f(a) = 0$ $A_2 = (\Delta x)f(\mathrm{a}_1)$ $A_3 = (\Delta x)f(\mathrm{a}_2)$ $A_4 = (\Delta x)f(\mathrm{a}_3)$
Calcula la suma de las áreas de los rectángulos. $A_T = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$ $A_T = 0 + 3 + 4 + 3 = 10$	Calcula la suma de las áreas de los rectángulos. $A_T = A_1 + A_2 + A_3 + A_4$ $A_T = f(a)\Delta x + f(\mathrm{a}_1)\Delta x + f(\mathrm{a}_2)\Delta x + f(\mathrm{a}_3)\Delta x$

Ejercicio 1: Determina, siguiendo los pasos indicados, el área aproximada de la siguiente figura, calculando la suma de las áreas de los rectángulos inscritos.



Paso 1: Determina el intervalo (ancho) de la figura sobre el eje x: ________ .



Paso 2: Divide o particiona el eje x para inscribir 3 rectángulos. ¿Cuál es el ancho de cada uno? Δx $=$ ______ .

Paso 3: Escribe los valores de x que coinciden con el extremo izquierdo de cada rectángulo: _____________ .

Paso 4: Calcula la altura de cada rectángulo (sustituye los valores de x anteriores en la función).

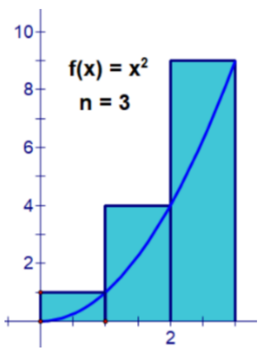
Paso 5: Calcula el área de cada rectángulo:

Rectángulo	Base	Altura	Área
1			
2			
3			

Paso 6: Calcula la suma de las áreas de todos los rectángulos:

$A_T = A_1 + A_2 + A_3 =$ _______________________.

Ahora practica el procedimiento, aplicando el criterio de cerrar los rectángulos por su extremo derecho:



Paso 1: Determina el intervalo (ancho) de la figura sobre el eje x: ________ .

Paso 2: Divide o particiona el eje x para inscribir 3 rectángulos. ¿Cuál es el ancho de cada uno? $\Delta x =$______.

Paso 3: Escribe los valores de x que coinciden con el extremo **derecho** de cada rectángulo: _____________ .

Paso 4: Calcula la altura de cada rectángulo (sustituye los valores de x anteriores en la función).

Paso 5: Calcula el área de cada rectángulo:

Rectángulo	Base	Altura	Área
1			
2			
3			

Paso 6: Calcula la suma de las áreas de todos los rectángulos:

$A_T = A_1 + A_2 + A_3 =$ ______________________.

Contesta las siguientes preguntas:

1. ¿Existe diferencia en el área calculada en ambos casos?

   ______________________________________ .

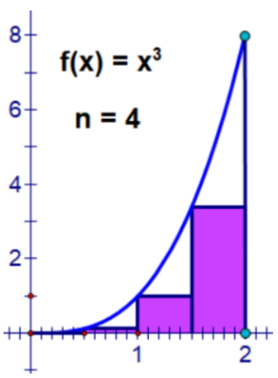
2. En caso afirmativo, ¿a qué se debe?

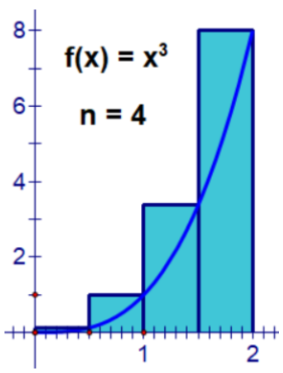
   ______________________________________ .

3. Con base en los resultados obtenidos en ambos cálculos, ¿Cuál crees que debería ser el valor del área exacta bajo la curva original? ¿porqué?

   ____ .

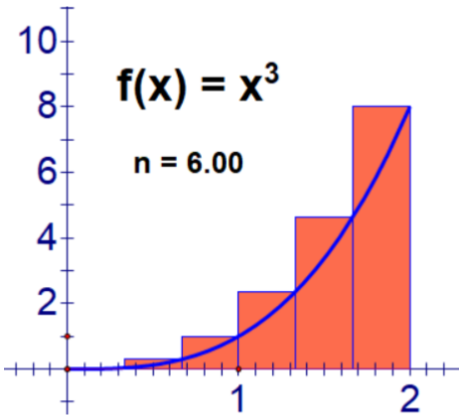
Ejercicio 2: En tu cuaderno, calcula el área bajo la curva $f(x) = x^3$ en el intervalo de $0\ a\ 2$, aplicando el procedimiento anterior para ambos planteamientos. Estima el valor exacto con base en los resultados obtenidos.





Actividades de Cierre

Ejercicios: Determina el área aproximada de las siguientes figuras, calculando la suma de las áreas de los rectángulos inscritos.



a) Ancho de cada rectángulo:

$$\Delta x = \frac{b-a}{n} =$$

b) Valores de los extremos derechos de los rectángulos:

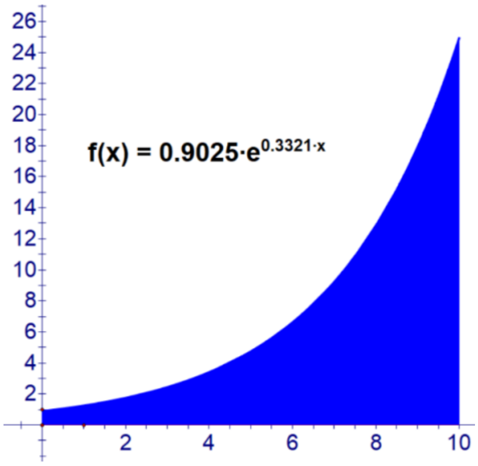
___ , ___ , ___ , ___ , ___ , ___

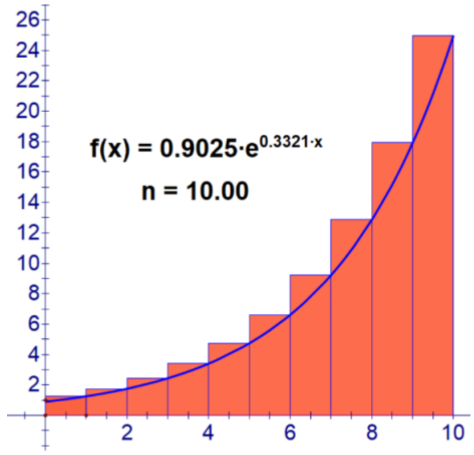
c) Tabla de valores:

Rectángulo	Base	Altura	Área
1			
2			
3			
4			
5			
6			
		Área Total:	

Actividades de Contextualización o Transversalidad

1. En los primeros días de la pandemia en México, en el mes de marzo de 2020, científicos epidemiólogos expertos en el área estimaron que la curva de contagios para el país seguiría el comportamiento del siguiente gráfico (izquierda) donde x es el número de días transcurridos a partir del brote. El área bajo la curva representa el número acumulado de casos positivos en el rango de diez días.





a) Determina cuántos casos positivos surgieron aproximadamente durante esos 10 primeros días de contagio. Para ello, haz una partición bajo el área, de tal manera que inscribas 10 rectángulos, como se muestra en la segunda figura.

Rectángulo	Base	Altura	Área
1			
2			
3			
4			
5			
6			
7			
8			
9			
10			

b) Si el gráfico se extiende a tres días más, ¿cuántos casos acumulados habrá en esos tres días?

Rectángulo	Base	Altura	Área
1			
2			
3			

c) ¿Cómo se comparan el número de casos en ésos últimos tres días con los 10 días previos?

____ .

d) Si extrapolamos el gráfico hasta los 30 días, ¿cuántos casos acumulados habrá en los días 28, 29 y 30?

Rectángulo	Base	Altura	Área
1			
2			
3			

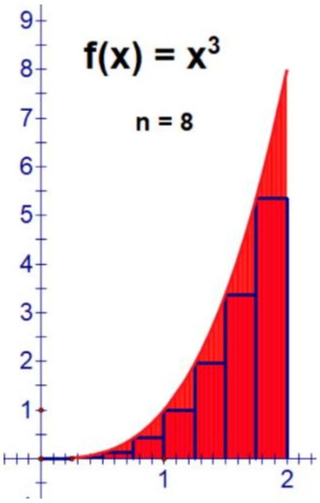
e) Ante el pronóstico de propagación del Covid 19, el gobierno federal anunció una serie de medidas para contener la velocidad de contagio. Se estima que, de respetarse estas medidas, el gráfico puede comportarse como la función $f(x) = 0.8913e^{0.3112x}$. ¿Cuántos casos de contagio podrían evitarse en esta situación solo en los últimos 3 días (28, 29 y 30) siguiendo las recomendaciones?

Rectángulo	Base	Altura	Área
1			
2			
3			

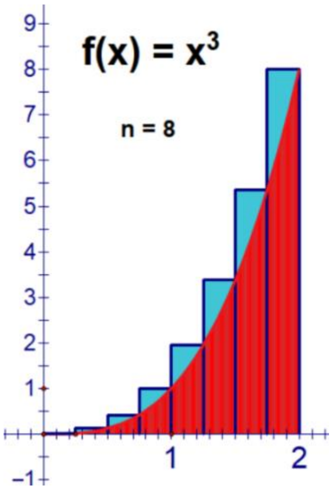
Ejercicios Adicionales

1. En cada uno de los siguientes casos, calcula el área aproximada bajo la curva para el número de rectángulos que se indica. Observa que en cada inciso hay dos planteamientos: Cuando los rectángulos se cierran por los extremos izquierdo y derecho. Estima en cada ejercicio el valor exacto bajo la curva con base en los resultados obtenidos.

a)



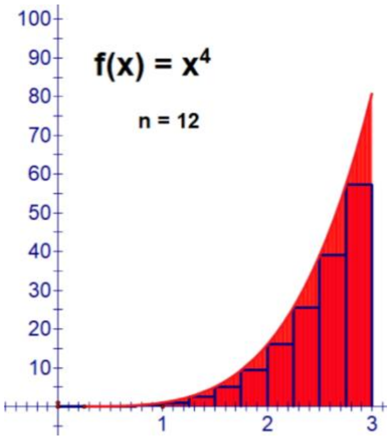
$A_T =$______________ u^2



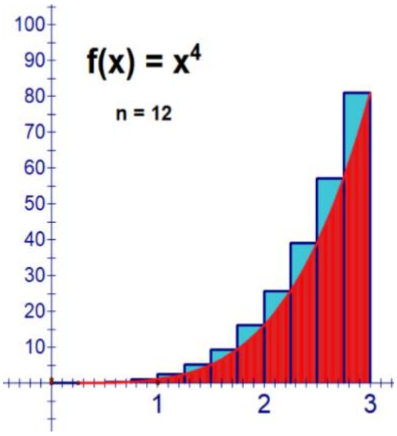
$A_T =$______________ u^2

$A_{Exacta} =$______________ u^2

b)



$A_T =$______________ u^2



$A_T =$______________ u^2

$A_{Exacta} =$______________ u^2

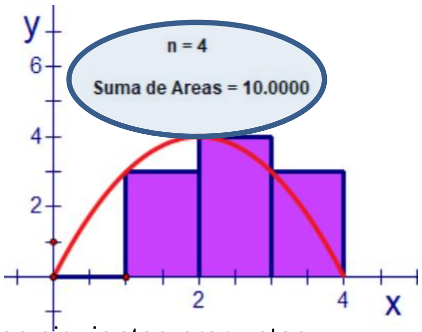
1.2 Notación Sigma

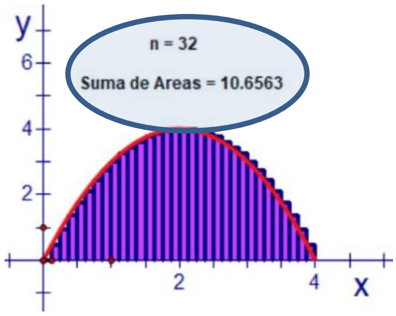
Introducción

Anteriormente aprendimos que, para obtener una buena aproximación del área bajo una

curva, podíamos emplear nuestros conocimientos previos sobre el cálculo de áreas de figuras básicas, como el rectángulo, y fraccionar o particionar el área que queremos determinar inscribiendo por debajo de ella una serie de rectángulos cuya cantidad podemos establecer según nuestro criterio.

¿De qué depende el número de rectángulos que decidamos emplear?, observa los dos planteamientos y el valor del área aproximada en cada caso:





Contesta las siguientes preguntas:

1. ¿En cuál de los dos planteamientos consideras que existe una mejor aproximación al área que se quiere calcular? ____
2. ¿De qué depende que nuestros cálculos se aproximen en mayor grado al área exacta de la figura bajo la curva? ________________________________
3. En el primer caso, ¿de cuántos rectángulos debemos sumar sus áreas? _______
4. En el segundo caso, ¿de cuántos rectángulos debemos hacerlo? ____________
5. ¿Qué ventajas tiene desarrollar los cálculos por la primera opción? ____
6. ¿Qué desventajas tiene desarrollar los cálculos por la segunda opción? ____

El cálculo de áreas aproximadas por el método *sumar áreas de rectángulos* es sencillo, como podrás haberlo experimentado, sin embargo, considerar un número de rectángulos cada vez más grande, implica invertir mucho tiempo y espacio, con una probabilidad más grande de tener un error en el proceso. En matemáticas existe un recurso valioso que puede ser de mucha utilidad para acortar los cálculos de las áreas de los rectángulos, sin importar prácticamente cuántos decidamos elegir para nuestro objetivo. Se llama Notación Sigma.

Actividades de Apertura

La notación sigma se emplea en matemáticas para calcular la suma de muchos o infinitos sumandos. Nos será de mucha utilidad para calcular la suma de muchos rectángulos en nuestras aproximaciones al cálculo del área bajo una curva. Como otras herramientas matemáticas, la notación sigma emplea cierta simbología y tiene algunas fórmulas y propiedades que es necesario dominar para su correcta aplicación.

Su nombre se debe a la letra griega "Sigma": $\sum$

Con la notación sigma se puede representar una expresión muy extensa, haciendo solo algunos pequeños cambios. Por ejemplo, si queremos expresar la suma de los primeros diez números naturales podemos hacerlo así en notación sigma:

$$\sum_{i=1}^{10} i$$

Es decir: $\sum_{i=1}^{10} i = 1+2+3+4+5+6+7+8+9+10$

La letra i recibe el nombre de **índice de suma**, los números 1 y 10 son los **límites inferior** y **superior,** respectivamente, de la suma, y tienen que cumplir que:

límite inferior $\leq$ **límite superior**

Limite Superior
Último número de la serie

Índice de la suma

$$\sum_{i=1}^{10} i$$

Límite Inferior
primer número de la serie

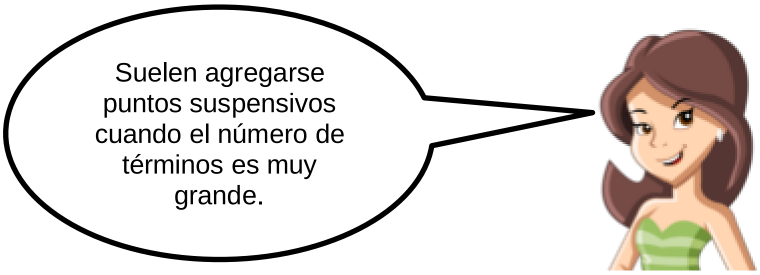
Límite Inferior
Debe ser siempre menor o igual, al superior

Para el índice de suma se puede emplear cualquier letra, las más comunes son $\boldsymbol{i}$, $\boldsymbol{j}$ o $\boldsymbol{k}$.

$$\sum_{i=1}^{n} a_i = a_1 + a_2 + a_3 + \ldots a_n$$

El lado izquierdo de esta igualdad se lee: **“La suma de términos $\boldsymbol{a_i}$ desde $\boldsymbol{i = 1}$ hasta $\boldsymbol{i = n}$”**.

Ejemplos de Notación Sigma:



$$\sum_{j=1}^{5} j = 1 + 2 + 3 + 4 + 5$$

$$\sum_{k=3}^{10} 2k = 2(3) + 2(4) + 2(5) + 2(6) + 2(7) + 2(8) + 2(9) + 2(10)$$

$$\sum_{i=2}^{18} 3i^2 = 3(2)^2 + 3(3)^2 + 3(4)^2 + 3(5)^2 + \ldots + 3(16)^2 + 3(17)^2 + 3(18)^2$$

$$\sum_{k=0}^{150} \frac{k^3}{5} = \frac{(0)^3}{5} + \frac{(1)^3}{5} + \frac{(2)^3}{5} + \frac{(3)^3}{5} + \ldots + \frac{(148)^3}{5} + \frac{(149)^3}{5} + \frac{(150)^3}{5}$$

$$\sum_{i=4}^{12} \frac{7}{i} = \frac{7}{4} + \frac{7}{5} + \frac{7}{6} + \frac{7}{7} + \frac{7}{8} + \frac{7}{9} + \frac{7}{10} + \frac{7}{11} + \frac{7}{12}$$

Actividades de Desarrollo

Realiza los siguientes ejercicios:

1. Determina las siguientes sumatorias (calcula también el resultado de la suma).

$a)\ \sum_{t=1}^{10} t =$

$b)\ \sum_{i=1}^{8} 2i =$

$c)\ \sum_{j=1}^{11} (3j+1) =$

$d)\ \sum_{j=1}^{12} j^2 =$

$e)\ \sum_{k=1}^{7} k^3 =$

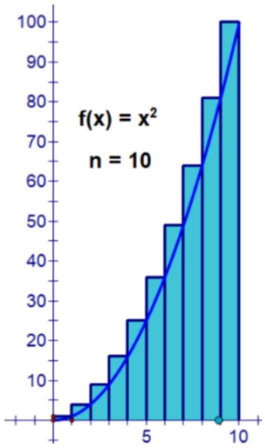
2. Empleando la notación sigma…
   a) ¿Cómo se representa la suma de los números 1 al 8?

   b) ¿Cómo se representa la suma de los números 1 al 20?

   c) ¿Cómo se representa la suma de los números $\frac{1}{2}$ al $\frac{1}{8}$?

   d) ¿Cómo se representa la suma de los números 1 al 20 elevados (cada uno) al cuadrado?

Ahora enfoquemos la notación Sigma en el cálculo de áreas aproximadas. Analiza el siguiente ejemplo: Se desea calcular el área bajo la curva de la ecuación $f(x) = x^2$ en el intervalo de $a = 0$ a $b = 10$.



El intervalo sobre el eje x es de $\boldsymbol{b} - \boldsymbol{a} = 10 - 0 = \mathbf{10.}$

Si se desea particionar en **10** rectángulos (**n=10**), cada uno tendrá un ancho de $\Delta\boldsymbol{x} = \frac{10}{10} = \mathbf{1.}$

Para calcular las alturas de los rectángulos, habrá que sustituir los valores de los extremos derechos de cada rectángulo en la función $f(x) = x^2$. Es decir, los valores del 1 al 10 se elevan al cuadrado. Al sumar el área de todos los rectángulos se obtiene la serie:

$$A_T = (1)(1)^2 + (1)(2)^2 + (1)(3)^2 + (1)(4)^2 + (1)(5)^2 + (1)(6)^2 + (1)(7)^2 + (1)(8)^2 + (1)(9)^2 + (1)(10)^2$$

Si queremos representar este cálculo con la Notación Sigma tendremos:

$$A_T = \sum_{i=1}^{10} (1)i^2$$

Nota que, si hubiera más rectángulos, la notación sigma apenas cambiaría en alguno de sus elementos. ¡Esa es la gran ventaja de su empleo!

Actividades de Cierre

1. Representa las siguientes series de sumas de áreas de rectángulos en Notación Sigma:

a) $A_T = 3(1)^2 + 3(2)^2 + 3(3)^2 + 3(4)^2 + 3(6)^2 + 3(7)^2 = \sum_{i=[\ ]}^{[\ ]} [\quad][\quad]$

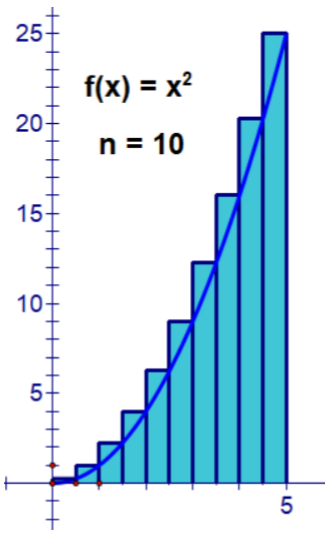
b) $A_T = 2(1)^3 + 2(2)^3 + 2(3)^3 + \cdots + 2(18)^3 + 2(19)^3 = \sum_{i=[\ ]}^{[\ ]} [\quad][\quad]$

c) $A_T = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{2}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{3}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{4}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{5}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{6}{2}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{7}{2}\right)^2 = \sum_{i=[\ ]}^{[\ ]} [\quad][\quad]$

Ejercicios Adicionales

1. Resuelve el siguiente ejercicio:

a) Calcula el área aproximada bajo la curva $f(x) = x^2$ en el intervalo de $a = 0$ a $b = 5$. Desarrolla los términos de la suma de áreas de rectángulos y represéntalos con su correspondiente notación sigma.



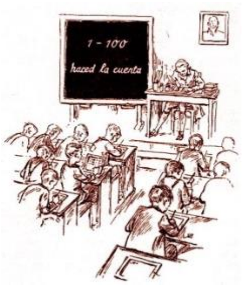
1.3 Propiedades y fórmulas de la notación sigma

Introducción

Disponemos con la Notación Sigma de una herramienta que nos permite representar los cálculos de sumas de términos de una manera más práctica y sencilla.

Algunos cálculos de expresiones más complejas que los realizados hasta ahora, requerirían normalmente de más tiempo, porque implican operaciones cada vez más extensas y tediosas, pero con la aplicación de algunas fórmulas y propiedades básicas, podrás realizar esos cálculos de una forma más rápida y segura.

Actividades de Apertura



Cierto día de 1786, J. B. Büttner, maestro de un colegio alemán, castigó a todos los niños a sumar los 100 primeros números naturales para tenerlos entretenidos y callados un buen rato. El niño **Carl Friedrich Gauss** obtuvo la respuesta casi de inmediato:

$$1 + 2 + 3 + \dots + 99 + 100 = \mathbf{5050}.$$

¿Cómo logró Gauss hacer los cálculos con esa rapidez e ingenio? Gauss notó que, si sumaba el primer y último número, el segundo con el penúltimo, etc., obtenía mismos resultados, dado que tenía 50 resultados iguales, entonces, solo faltaba multiplicar la suma por 50.

Esta anécdota, nos da una idea de, cómo podemos crear atajos en los cálculos cuando empleamos la notación sigma. Analicemos el procedimiento de Gauss:

La suma de los números del 1 al 100 se representa con la expresión:

$$\sum_{i=1}^{100} i = 1 + 2 + 3 + 4 + \dots + 98 + 99 + 100$$

Si invertimos el orden en la serie:

$$\sum_{1=1}^{100} i = 100 + 99 + 98 + \dots + 4 + 3 + 2 + 1$$

Ahora sumemos los términos de ambas series en ese orden invertido:

$$\begin{array}{l} \sum_{i=1}^{100} i = 1+2+3+4+\ldots+98+99+100 \\ \sum_{i=1}^{100} i = 100+99+98+\ldots+4+3+2+1 \quad + \\ \hline 2\sum_{i=1}^{100} i = 101+101+101+\ldots 101+101+101 \end{array}$$

Por lo que:

$$2\sum_{i=1}^{100} i = 101 + 101 + 101 + \ldots 101 + 101 + 101 = (100)(101)$$

$$2\sum_{i=1}^{100} i = (100)(101)$$

Despejando la sumatoria:

$$\sum_{i=1}^{100} i = \frac{(101)(100)}{2}$$

Generalizando la expresión para cualquier valor del límite superior:

$$\sum_{i=1}^{n} i = \frac{(n)(n+1)}{2}$$

Se obtiene una fórmula que permite calcular la suma de los números consecutivos desde 1 hasta cualquier valor del límite superior.

Ejercicios: Aplicando la formula anterior, calcula las siguientes sumatorias:

a) $\sum_{i=1}^{50} i =$

b) $\sum_{j=1}^{150} j =$

c) $\sum_{k=1}^{210} 2k =$

d) $\sum_{i=1}^{300} \frac{2}{3} i =$

Actividades de Desarrollo

De manera similar a la deducción de la formula anterior, para cierto tipo de sumatorias, se pueden deducir formulas especificas, con el fin de reducir los cálculos. Las más comunes son las siguientes:

1. $\sum_{i=1}^{n} i = 1+2+3+...+(n-1)+n = \frac{n(n+1)}{2}$
2. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = 1^2+2^2+3^2+...+(n-1)^2+n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
3. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = 1^3+2^3+3^3+...+(n-1)^3+n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$
4. $\sum_{i=1}^{n} i^4 = 1^4+2^4+3^4+...+(n-1)^4+n^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30}$

Es decir, es posible calcular de manera directa sumas de números elevados al cuadrado, al cubo y a la cuarta, aplicando la fórmula adecuada.

Las siguientes propiedades se emplean para modificar previamente las sumatorias en expresiones equivalentes, de tal forma que, pueda aplicarse alguna de las fórmulas anteriores.

Propiedad	Descripción	Ejemplo
1. $\sum_{i=1}^{n} c = cn$	Si se suma solamente un valor constante, éste se repite n veces.	$\sum_{i=1}^{3} 8 = 8+8+8 = (8)(3) = 24$
2. $\sum_{i=1}^{n} c\,f(i) = c\sum_{i=1}^{n} f(i)$	Si la sumatoria tiene un factor constante, puede sacarse de la sumatoria para multiplicarse posteriormente por el resultado.	$\sum_{i=1}^{n} 5i^3 = 5\sum_{i=1}^{n} i^3$
3. $\sum_{i=1}^{n}[f(i) \pm g(i)] = \sum_{i=1}^{n} f(i) \pm \sum_{i=1}^{n} g(i)$	Las sumas algebraicas de términos en una sumatoria, pueden realizarse por separado.	$\sum_{i=1}^{n}(2i^3+3i^2-4i) = \sum_{i=1}^{n} 2i^3 + \sum_{i=1}^{n} 3i^2 - \sum_{i=1}^{n} 4i$

Ejemplo de aplicación de las propiedades y fórmulas de la Notación Sigma:

$$\sum_{i=1}^{40}(5i^3-2i^2+3i)=\sum_{i=1}^{40}5i^3-\sum_{i=1}^{40}2i^2+\sum_{i=1}^{40}3i$$

Se separan los sumandos (Propiedad 3).

$$=5\sum_{i=1}^{40}i^3\quad-2\sum_{i=1}^{40}i^2\quad+3\sum_{i=1}^{40}i$$

Se sacan las constantes (Propiedad 2).

Fórmula 3 | Fórmula 2 | Fórmula 1

$$=5\frac{(40)^2(41)^2}{4}-2\frac{40(41)(81)}{6}+3\frac{40(41)}{2}$$

Se sustituye el valor de n.

$$=5\frac{(1600)(1681)}{4}-2\frac{132840}{6}+3\frac{1640}{2}$$

$$=3362000-44280+2460=3320180$$

1. **Ejercicios:** Aplicando las Propiedades y Fórmulas de la Notación Sigma, resuelve las siguientes sumatorias:

a) $\sum_{i=1}^{25}12=$

b) $\sum_{j=1}^{20}3j=$

c) $\sum_{i=1}^{18}(5i+10i^2)=$

d) $\sum_{i=1}^{22}\frac{i^3}{3}=$

e) $\sum_{i=1}^{25}(10i^2+2i-3)=$

Actividades de Cierre

En cada uno de los siguientes casos, se muestra el planteamiento en el cálculo de las áreas de los rectángulos que se forman bajo la curva y la representación con su notación sigma respectiva. Completa los elementos faltantes señalados con el espacio en blanco.

a) $\sum_{i=1}^{[\quad]} [\quad]\, i = 3(1) + 3(2) + 3(3) + 3(4) + \cdots + 3(14) + 3(15)$

b) $\sum_{i=1}^{32} 8 = 8[\quad]$

c) $\sum_{i=1}^{23} \left[\frac{\quad}{\quad}\right] i^{[\quad]} = \frac{3}{2}(1)^2 + \frac{3}{2}(2)^2 + \frac{3}{2}(3)^2 + \cdots \frac{3}{2}(22)^2 + \frac{3}{2}(23)^2$

d) $\sum_{j=1}^{45} ([\quad]j^2 + [\quad]j) = 5\sum_{j=1}^{[\quad]} j^2 + 7\sum_{j=1}^{[\quad]} j$

e) $\sum_{k=1}^{100} (k+2)^{[\quad]} = \sum_{k=1}^{[\quad]} k^2 + 4\sum_{k=1}^{[\quad]} k + \sum_{k=1}^{[\quad]} 4$

f) $\sum_{i=1}^{[\quad]} i = \frac{23(\quad)}{2}$

g) $\sum_{i=1}^{[\quad]} i^{[\quad]} = \frac{50(\quad)(101)}{6}$

h) $\sum_{i=1}^{[\quad]} i^{[\quad]} = \frac{[\quad]^2(88)^2}{4}$

Actividades de Contextualización o Transversalidad

El grupo 6ºN de alumnos del CBTis 224, organizan una rifa en la que el premio es un viaje a Mazatlán, Sinaloa; con estancia de dos noches de hospedaje con un costo de $\$5000$. La rifa consiste en "raspar" un número del $1\ al\ 150$. La persona paga en dinero el número que descubre. Por ejemplo, si descubre el $número\ 25\ paga\ \$25$. Empleando la notación sigma, determina:

a) ¿Cuánto dinero pueden recaudar los alumnos si venden todos los números? Escribe los cálculos que desarrollaste.

b) ¿Cuánto es la ganancia que obtienen?

Ejercicios Adicionales

Calcula las siguientes sumatorias. En algunos casos es posible que debas aplicar algún desarrollo algebraico.

a) $\sum_{i=1}^{15}(i^2+2)^2 =$

b) $\sum_{j=1}^{15}(j-1)^3 =$

1.4 Aplicación de fórmulas y propiedades. Cálculo de áreas por aproximación con notación sigma.

Introducción

Hasta ahora hemos visto, cómo plantear un problema donde se requiere el cálculo de

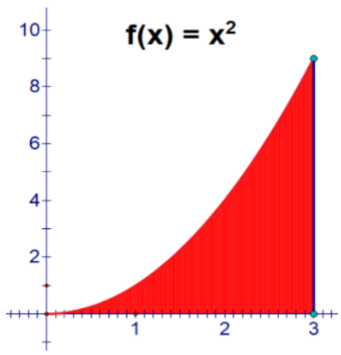
área de una figura irregular. También has aprendido de una valiosa herramienta de cálculo como la notación sigma para realizar operaciones de series numéricas de una manera mas sencilla y conveniente. Ahora podrás experimentar, con ambos conocimientos, para resolver problemas que se complican con nuestros conocimientos de geometría elemental.

Un buen dominio de las propiedades y fórmulas de la Notación sigma, te permitirá hacer cálculo de áreas bajo curvas con una aproximación que sea muy cercana a la exacta.

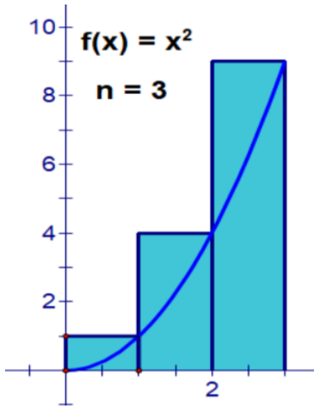
Actividades de Apertura

Analiza el siguiente ejemplo, en el que se hace un comparativo, entre el cálculo de éstas, determinando el área de los rectángulos de manera convencional y aplicando lo aprendido hasta ahora.

Ejemplo 1: ¿Cuál es el área bajo la curva?



1. Primero hagamos una aproximación inscribiendo tres rectángulos.



Intervalo: $b - a = 3 - 0 = 3$
Número de rectángulos: $n = 3$
Ancho de los rectángulos:

$$\Delta \boldsymbol{x} = \frac{3}{3} = 1$$

Valores de x para los extremos derechos de los rectángulos: **1, 2 y 3**

Áreas de Rectángulos

Cálculo de las alturas:

$$A = (Base)(Altura)$$

$f(1) = (1)^2 = 1$	$A_1 = (1)(1) = 1$
$f(2) = (2)^2 = 4$	$A_2 = (1)(4) = 4$
$f(3) = (3)^2 = 9$	$A_3 = (1)(9) = 9$
	$A_T = 14\ u^2$

Notación Sigma

$$A_T = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Se generan números del 1 al 3

$$\sum_{i=1}^{3} i^2(1)$$

Las alturas se calculan sustituyendo en la función $f(x) = x^2$

$$A_T = \sum_{i=1}^{3} i^2(1) = \frac{(3)(4)(7)}{6} = 14u^2$$

Observa que en ambos casos se obtiene el mismo resultado.

La expresión:

$$A_T = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ \Delta x$$

representa la suma de las áreas de cualquier número de rectángulos (n). El área de cada uno de ellos se calcula multiplicando su ancho Δx por su altura $f(x)$.

Suma de n rectángulos

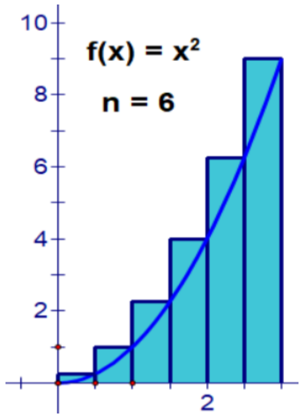
Altura de cada rectángulo

$$A_T = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\ \Delta x$$

Área Total

Base de cada rectángulo

2. Hagamos una aproximación inscribiendo seis rectángulos.



Intervalo: $b - a = 3 - 0 = 3$

Número de rectángulos: $n = 6$

Ancho de los rectángulos:

$$\Delta x = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Valores de x para los extremos derechos de los rectángulos:

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}$$

Áreas de Rectángulos

Cálculo de las alturas:

$$f\left(\frac{1}{2}\right) = \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$f\left(\frac{2}{2}\right) = (1)^2 = 1$$

$$f\left(\frac{3}{2}\right) = \left(\frac{3}{2}\right)^2 = \frac{9}{4}$$

$$f\left(\frac{4}{2}\right) = (2)^2 = 4$$

$$f\left(\frac{5}{2}\right) = \left(\frac{5}{2}\right)^2 = \frac{25}{4}$$

$$f\left(\frac{6}{2}\right) = (3)^2 = 9$$

Cálculo de áreas:
$A = (Base)(Altura)$

$$A_1 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{1}{8}$$

$$A_2 = \left(\frac{1}{2}\right)(1) = \frac{1}{2}$$

$$A_3 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{9}{4}\right) = \frac{9}{8}$$

$$A_4 = \left(\frac{1}{2}\right)(4) = 2$$

$$A_5 = \left(\frac{1}{2}\right)\left(\frac{25}{4}\right) = \frac{25}{8}$$

$$A_6 = \left(\frac{1}{2}\right)(9) = \frac{9}{2}$$

$$A_T = \frac{91}{8} = 11.375\ u^2$$

Notación Sigma

$$A_T = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Se generan números $\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}$ *

Las alturas se calculan elevando estos valores al cuadrado como indica la función $f(x) = x^2$

$$A_T = \sum_{i=1}^{6} \left(\frac{i}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)$$

$$A_T = \sum_{i=1}^{6} \frac{i^2}{4}\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{i=1}^{6} \frac{i^2}{8} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{6} i^2 =$$

$$A_T = \frac{1}{8}\frac{(6)(7)(13)}{6} = \frac{91}{8}u^2 = 11.375\ u^2$$

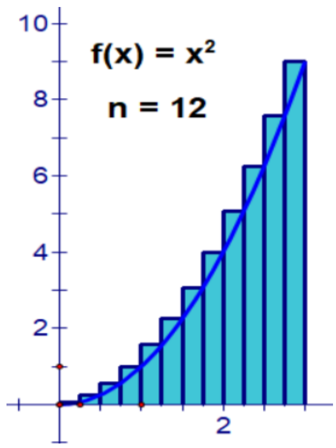
Observa que en ambos casos se obtiene nuevamente el mismo resultado.

Actividades de Desarrollo

Aproximarse aún más al resultado exacto, en el planteamiento del ejemplo anterior, implica considerar un mayor número de rectángulos, se vuelve poco práctico el procedimiento de calcular las áreas de los rectángulos inscritos con la fórmula convencional.

Ejercicio:

1. Realiza paso por paso el cálculo de esas áreas empleando la Notación Sigma:



Intervalo: $b - a =$
Número de rectángulos: $n =$
Ancho de los rectángulos:

$$\Delta x = \left[\frac{\ }{\ }\right] = \left[\frac{\ }{\ }\right]$$

Por lo que los **11** valores de x para los extremos derechos de los rectángulos son:

$\_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_, \_\_$

Notación Sigma:

Área total:

$$A_T = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Registra el valor del límite superior

Escribe la expresión que contiene a i, para que genere las fracciones que correspondan.

Escribe la medida del ancho de cada rectángulo.

$$A_T = \sum_{i=1}^{[\ \ ]} [\ \ ][\ \ ]$$

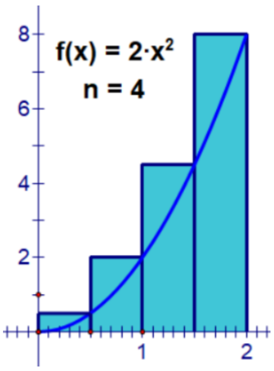
$$A_T = \sum_{i=1}^{[\ \ ]} [\ \ ][\ \ ] = \sum_{i=1}^{[\ \ ]} [\ \ ] = [\ \ ]\sum_{i=1}^{[\ \ ]} [\ \ ] =$$

$$A_T = \frac{[\ \ ]}{[\ \ ]}\frac{[\ \ ]}{[\ \ ]} = \frac{[\ \ ]}{[\ \ ]}u^2 = \_\_\_\_\_\_ u^2$$

Actividades de Cierre

1. En cada uno de los siguientes casos, se muestra el planteamiento en el cálculo de las áreas de los rectángulos que se forman bajo la curva, y la representación con notación sigma respectiva. Completa los elementos faltantes señalados en el espacio en blanco.

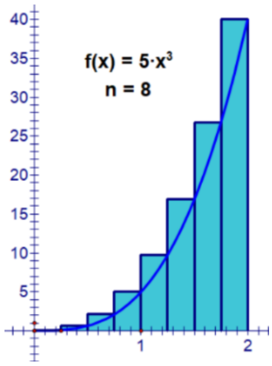
a)



Rectángulo	Base	Altura	Área
1	$\frac{1}{2}$	$2\left(\frac{1}{2}\right)^2$	$2\left(\frac{1}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)$
2	$\left[\frac{\ }{\ }\right]$	$2\left[\frac{\ }{\ }\right]^2$	$2\left(\frac{2}{2}\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)$
3	$\frac{1}{2}$	$2\left(\frac{3}{2}\right)^2$	$2\left(\frac{3}{2}\right)^2\left[\frac{\ }{\ }\right]$
4	$\left[\frac{\ }{\ }\right]$	$2\left(\frac{4}{2}\right)^2$	$2\left[\frac{\ }{\ }\right]^2\left(\frac{1}{2}\right)$

$$A_T = \sum_{n=1}^{4}\left(\left[\frac{\ }{\ }\right]\right)^2\left(\frac{1}{2}\right)$$

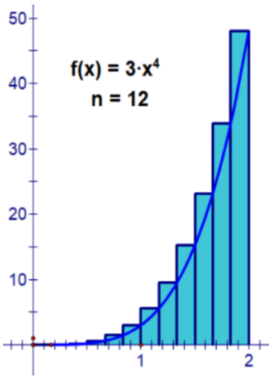
b)



Rectángulo	Base	Altura	Área
1	$\left[\frac{\ }{\ }\right]$	$5\left(\frac{1}{4}\right)^3$	$5\left[\frac{\ }{\ }\right]^3\left(\frac{1}{4}\right)$
2	$\frac{1}{4}$	$5\left(\frac{2}{4}\right)^3$	$5\left(\frac{2}{4}\right)^3\left(\frac{1}{4}\right)$
3	$\frac{1}{4}$	$5\left(\frac{3}{4}\right)^3$	$5\left(\frac{3}{4}\right)^3\left[\frac{\ }{\ }\right]$
8	$\frac{1}{4}$	$5\left[\frac{\ }{\ }\right]^3$	$5\left(\frac{8}{4}\right)^{[\ ]}\left(\frac{1}{4}\right)$

$$A_T = \sum_{n=1}^{[\ ]}\left(\left[\frac{[\ ]}{4}\right]\right)^3\left(\frac{1}{[\ ]}\right)$$

c)

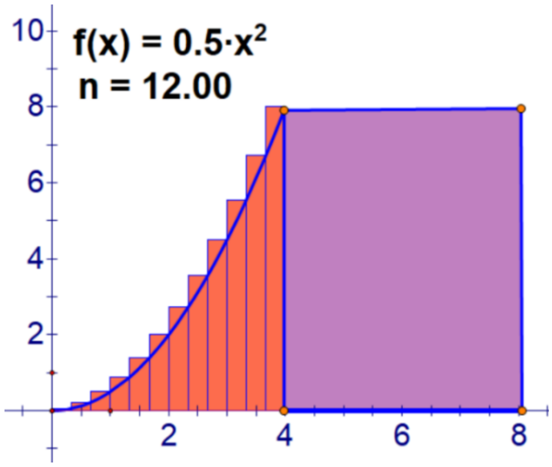


Rectángulo	Base	Altura	Área
1	$\frac{1}{6}$	$3\left[\frac{\ }{\ }\right]^4$	$[\ ]\left(\frac{1}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)$
2	$\left[\frac{\ }{\ }\right]$	$3\left(\frac{2}{6}\right)^4$	$[\ ]\left(\frac{2}{6}\right)^4\left(\frac{1}{6}\right)$
3	$\frac{1}{6}$	$3\left[\frac{\ }{\ }\right]^4$	$3\left(\frac{3}{6}\right)^{[\ ]}\left(\frac{1}{6}\right)$
12	$\frac{1}{6}$	$3\left[\frac{\ }{\ }\right]^4$	$3\left(\frac{12}{6}\right)^{[\ ]}\left[\frac{\ }{\ }\right]$

$$A_T = \sum_{n=1}^{11}\left(\left[\frac{i}{[\ ]}\right]\right)^{[\ ]}\left(\frac{[\ ]}{6}\right)$$

Actividades de Contextualización o Transversalidad

En un parque de deportes extremos de tu ciudad, se desea construir un área igual a la parte de patinetas de un parque que se vio en internet. Para ello, se debe calcular la cantidad de concreto en metros cúbicos que se han de necesitar en la rampa extrema. Ver la figura. El contorno de la superficie de la rampa es parabólico y está dada por la siguiente función:



a) Determina el área del contorno rectangular que se encuentra al lado de la parábola.

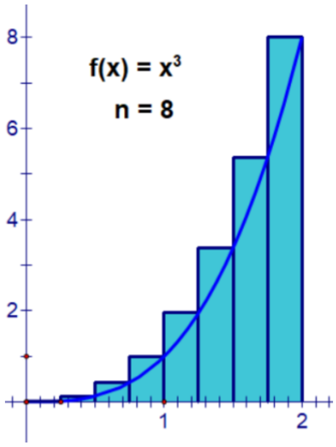
b) Calcula el área aproximada del contorno parabólico empleando 12 rectángulos, como se muestra en la figura. Emplea las sumas de Riemann en tu planteamiento.

c) Calcula el volumen aproximado de la rampa.

Ejercicios Adicionales

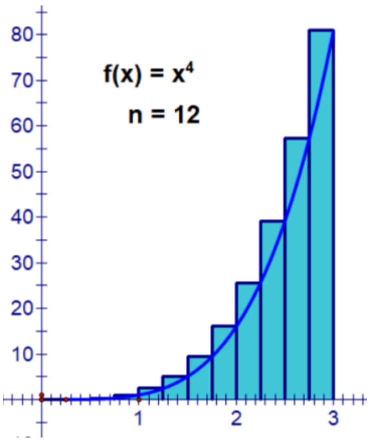
En cada uno de los siguientes casos, calcula el área bajo la curva para el número de rectángulos que se indica. Compara los resultados con el cálculo de áreas aproximadas que realizaste en los ejercicios de la página 23.

a)



$A_T =$__________ u^2

b)



$A_T =$__________ u^2

1.5 Sumas de Riemann

Introducción

En matemáticas, la Suma de Riemann es un tipo de aproximación del valor de un área mediante una suma finita. Se llama así en honor al matemático alemán del siglo XIX, Bernhard Riemann.

La suma se calcula dividiendo la región en formas (rectángulos, trapezoides, parábolas o cúbicas) que juntas forman una región que es similar a la región que se está midiendo, luego, calculando el área para cada una de estas formas y, finalmente, agregando todas estas pequeñas áreas juntas. El procedimiento que has seguido hasta para el cálculo de áreas por aproximación es uno de estos planteamientos, puesto que hemos estado empleando rectángulos en las particiones.

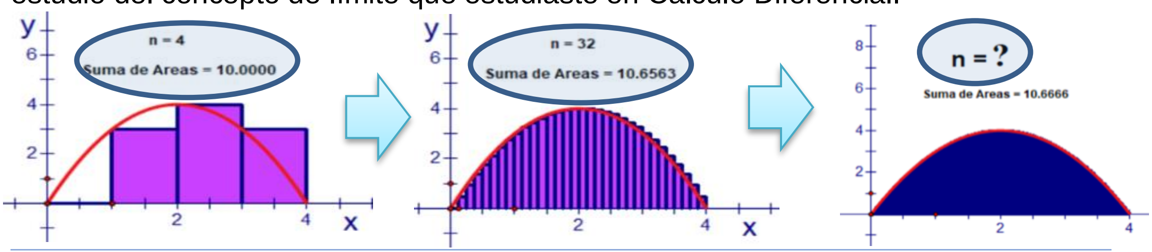
Este enfoque se puede usar para encontrar una aproximación numérica para una **integral definida,** y es la base para introducirnos al estudio del **Teorema fundamental del cálculo** que abordarás en los temas posteriores.

Debido a que la región rellenada por las formas pequeñas, generalmente no es exactamente la misma forma que la región que se está midiendo, la suma de Riemann será diferente del área que se está midiendo. A medida que las formas se hacen cada vez más pequeñas, la suma se acerca al área exacta bajo la curva que se esté calculando.

1.5.1. Cálculo de áreas exactas con Sumas de Riemann

Introducción

Hemos deducido que a mayor número de rectángulos que empleemos en las particiones, mayor es la aproximación de nuestros cálculos al valor del área que estamos determinando, pero ¿es posible determinar el área exacta empleando este método?, ¿cuántos rectángulos son necesarios para ese fin? La respuesta está en el estudio del concepto de límite que estudiaste en Cálculo Diferencial.



Actividades de Apertura

Algunas de las propiedades de los límites que se estudiaron en Cálculo Diferencial son de gran importancia en el cálculo del área exacta por aproximación cuando se emplean Sumas de Riemann. Recordemos un poco:

1. Calcula las siguientes divisiones:

a) $\frac{1}{1} =$

b) $\frac{1}{10} =$

c) $\frac{1}{100} =$

d) $\frac{1}{1000} =$

e) $\frac{1}{10000} =$

f) $\frac{1}{100000} =$

g) $\frac{1}{10000000} =$

h) $\frac{1}{10000000} =$

2. Contesta las siguientes preguntas:

   a) ¿Cómo va cambiando sucesivamente el divisor (denominador) en cada operación?

   ____

   b) ¿Cómo va cambiando sucesivamente el cociente (resultado) de las divisiones?

   ____

3. Con base en tus observaciones, selecciona la opción correcta en la siguiente afirmación: Si se divide cualquier cantidad entre un número cada vez <u>(menor/mayor)</u>, el cociente que se obtiene de esa división es cada vez más <u>(pequeño/grande)</u>.

4. Siguiendo esta lógica en la secuencia de operaciones realizadas, ¿qué debería resultar en la operación de división, cuando el divisor es una cantidad inconmensurable como el infinito (∞)?

La secuencia de operaciones anterior se resume en una propiedad de los límites que es útil en el cálculo de áreas exactas cuando aplicamos las Sumas de Riemann

$$\lim_{V \to \infty} \left(\frac{C}{V}\right) = 0$$

Otra propiedad de los límites que parece ser más obvia es la siguiente:

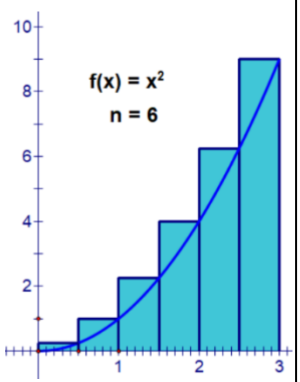
$$\lim_{V \to \infty} (CV) = \infty$$

Si se multiplica una constante por el infinito, el resultado sigue siendo infinito. Ambas propiedades intervienen en el cálculo de áreas exactas que trataremos en esta sección.

Actividades de Desarrollo

Planteemos ahora, un problema en el que sea posible calcular el área exacta bajo una curva determinada. Para ello, comparemos un caso en particular y generalicemos para cualquier valor de n (cualquier número de rectángulos).

Ejemplo 1: Hagamos una aproximación inscribiendo seis rectángulos.



Intervalo: $b - a = 3 - 0 = 3$
Número de rectángulos: $n = 6$
Ancho de los rectángulos:

$$\Delta \boldsymbol{x} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$$

Por lo que los valores de x para los extremos derechos de los rectángulos varían con diferencia de $\frac{1}{2}$.

$$\frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}$$

Intervalo: $b - a = 3 - 0 = 3$
Número de rectángulos: n
Ancho de los rectángulos:

$$\Delta \boldsymbol{x} = \frac{3}{n}$$

Por lo que los valores de x para los extremos derechos de los rectángulos varían con una diferencia de $\frac{3}{n}$.

Notación Sigma

$$A_T = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x$$

Se generan números $* \ \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}, \frac{5}{2}, \frac{6}{2}$

Las alturas se calculan elevando estos valores al cuadrado como indica la función $f(x) = x^2$.

$$A_T = \sum_{i=1}^{6} \left(\frac{i}{2}\right)^2 \left(\frac{1}{2}\right)$$

El ancho de cada rectángulo nos sirve como referente para deducir la expresión que genera el cálculo de las alturas.

$$A_T = \sum_{i=1}^{6} \frac{i^2}{4}\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{i=1}^{6} \frac{i^2}{8} = \frac{1}{8}\sum_{i=1}^{6} i^2 =$$

$$A_T = \frac{1}{8}\frac{(6)(7)(13)}{6} = \frac{91}{8}u^2 = 11.375\ u^2$$

Sumas de Riemann

$$A_T = \sum_{i=1}^{n} f(x_i) \Delta x$$

Las alturas se calculan elevando estos valores al cuadrado, como indica la función $f(x) = x^2$.

$$A_T = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3i}{n}\right)^2 \left(\frac{3}{n}\right)$$

El ancho de cada rectángulo nos sirve como referente para deducir la expresión que genera el cálculo de las alturas.

$$A_T = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{3i}{n}\right)^2 \left(\frac{3}{n}\right)$$

Esta sumatoria representa el área aproximada bajo la curva para cualquier número de rectángulos $\boldsymbol{n}$.

Reduzcamos ahora la sumatoria anterior, y así poder asignar el valor de n. Se describe el paso a paso:

$$A_T = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{3i}{n}\right)^2\left(\frac{3}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{9i^2}{n^2}\right)\left(\frac{3}{n}\right) = \sum_{i=1}^{n}\left(\frac{27i^2}{n^3}\right) = \frac{27}{n^3}\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{27}{n^3}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} =$$

Área aproximada bajo la curva expresada en forma general para cualquier valor de n.

Se eleva al cuadrado los valores extremos de los rectángulos para calcular las alturas.

Resultado de multiplicar la base por la altura de los rectángulos.

Se aplica la segunda propiedad, para sacar las constantes de las sumatorias.

Se aplica la fórmula 2 para sumatorias de i^2

Con esta expresión puede calcularse el área para cualquier número de rectángulos n.

$$A_T = \frac{27}{n^3}\frac{2n^3+3n^2+n}{6} = \frac{54n^3+81n^2+2n}{6n^3} = \frac{54n^3}{6n^3} + \frac{81n^2}{6n^3} + \frac{27n}{6n^3}$$

Se desarrolla la expresión resultante de la fórmula 2.

Resultado de multiplicar ambas fracciones.

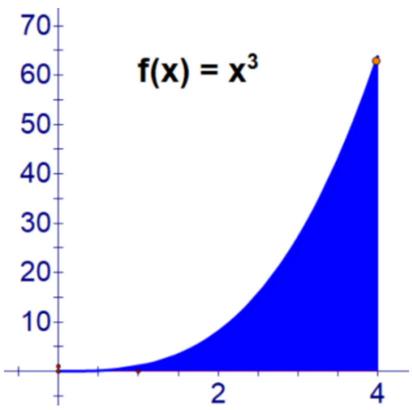
Se separa el resultado en tres fracciones para reducir factores.

$$A_T = 9 + \frac{81}{6n} + \frac{27}{6n^2}$$

Ahora supongamos un número suficientemente grande de rectángulos que cubran toda el área a calcular. Aquí aplicamos la propiedad de los límites que estudiamos anteriormente:

$$A_{exacta} = \lim_{n\to\infty}\left(9 + \frac{81}{6n} + \frac{27}{6n^2}\right) = \left[9 + \frac{81}{6(\infty)} + \frac{27}{6(\infty)^2}\right] = \left(9 + \frac{81}{\infty} + \frac{27}{\infty}\right) = 9\ u^2$$

Ejemplo 2: Determina el área exacta bajo la curva siguiente, empleando Sumas de Riemann.



a) Cálculo del Intervalo: $b - a = 4 - 0 = 4$
b) Número de rectángulos: n
c) Ancho de los rectángulos:

$$\Delta \boldsymbol{x} = \frac{4}{n}$$

Por lo que los valores de x para los extremos izquierdos de los rectángulos varían con una diferencia de $\frac{4}{n}$.

d) Área Aproximada:

Observa que en función del ancho se construye la expresión que genera el cálculo de las alturas.

$$A_T = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

$$A_T = \sum_{i=1}^{n} \left(\frac{4}{n} i\right)^3 \frac{4}{n}$$

Se aplica la fórmula 3 para sumatorias de i^2.

e) Desarrollando la sumatoria anterior:

$$A_T = \sum_{i=1}^{n} (\frac{4}{n} i)^3 \frac{4}{n} = \sum_{i=1}^{n} (\frac{16}{n^3} i^3) \frac{4}{n} = \sum_{i=1}^{n} \frac{64}{n^4} i^3 = \frac{64}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3$$

Se desarrolla la expresión resultante de la fórmula 3.

$$A_T = \frac{64}{n^4} \sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{64}{n^4} \frac{n^2(n+1)^2}{4} = \frac{64}{n^4} \frac{n^2(n^2+2n+1)}{4} = \frac{64}{n^4} \frac{(n^4+2n^3+n^2)}{4}$$

$$A_T = \frac{(64n^4 + 128n^3 + 64n^2)}{4n^4} = \frac{64n^4}{4n^4} + \frac{128n^3}{4n^4} + \frac{64n^2}{4n^4} = \frac{64}{4} + \frac{128}{4n} + \frac{64}{4n^2}$$

$$A_T = 16 + \frac{128}{4n} + \frac{64}{4n^2}$$

Puedes calcular el área aproximada para cualquier número de rectángulos n. ¡Solo sustituye el valor que desees!

Aplicando el límite de la expresión cuando el número de rectángulos es infinito:

$$A_{exacta} = \lim_{n\to\infty} \left(16 + \frac{128}{4n} + \frac{64}{4n^2}\right) = \left[16 + + \frac{128}{4(\infty)} + \frac{64}{4(\infty)^2}\right] = \left(16 + \frac{128}{\infty} + \frac{64}{\infty}\right) = 16\, u^2$$

Nota que para reducir la sumatoria a su mínima expresión, es de vital importancia desarrollar las expresiones que se tienen en cada una. Una buena medida para no repetir los pasos en el proceso de cálculo del área exacta es calcular previamente la expresión que se vaya a emplear. Te mostramos aquí ambas formas de representar los resultados.

1. $\sum_{i=1}^{n} i = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2+n}{2}$

2. $\sum_{i=1}^{n} i^2 = \frac{n(n+1))(2n+1)}{6} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6}$

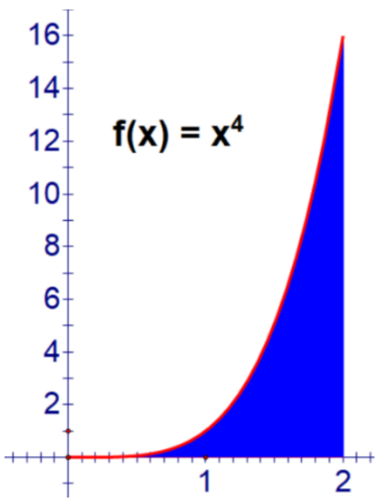
3. $\sum_{i=1}^{n} i^3 = \frac{n^2(n+1))^2}{4} = \frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$

4. $\sum_{i=1}^{n} i^4 = \frac{n(n+1)(6n^3+9n^2+n-1)}{30} = \frac{6n^5+15n^4+10n^3-n}{30}$

Los primeros son útiles en el cálculo de áreas aproximadas donde la sustitución es directa; los segundos, en el cálculo de áreas exactas donde se requiere reducir a su mínima expresión antes de aplicar el límite al infinito.

Actividades de Cierre

1. Determina paso a paso con la ayuda de la siguiente guía, el área exacta bajo la curva siguiente, aplicando Sumas de Riemann.



a) Cálculo del Intervalo: $b - a =$ _____ $=$ ____

b) Número de rectángulos: $n =$

c) Ancho de los rectángulos:

$$\Delta \boldsymbol{x} = \frac{b-a}{n} = \frac{[\ \ ]}{[\ \ ]}$$

d) Área Aproximada:

$$A_T = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x$$

Se determina la expresión que representa el cálculo de las alturas por el ancho de los rectángulos.

$$A_T = \sum_{i=1}^{n}\left[\frac{\quad}{\quad}\right]\left[\frac{\quad}{\quad}\right]$$

a) Desarrolla la sumatoria anterior:

$$A_T = \sum_{i=1}^{n}[\quad][\quad] = \sum_{i=1}^{n}[\quad][\quad] = \sum_{i=1}^{n}[\quad] = [\quad]\sum_{i=1}^{n}[\quad]$$

Se aplica la fórmula 3 para sumatorias de i^2.

Se desarrolla la expresión resultante de la fórmula 3.

$$A_T = [\quad]\sum_{i=1}^{n}[\quad] == \left[\frac{\quad}{\quad}\right]\left[\frac{\quad}{\quad}\right]\left[\frac{\quad}{\quad}\right]\left[\frac{\quad}{\quad}\right] = \left[\frac{\quad}{\quad}\right]\left[\frac{\quad}{\quad}\right]$$

$$A_T = \left[\frac{\quad}{\quad}\right] = \left[\quad\right] = \left[\quad\right]$$

$$A_T = \left[\quad\right]$$

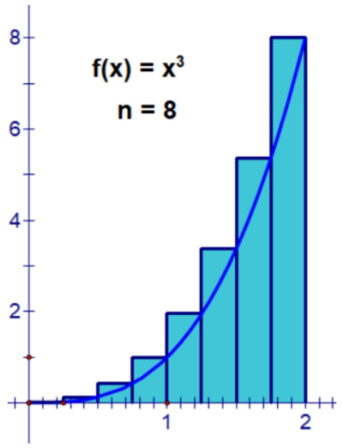
Aplicando el límite de la expresión cuando el número de rectángulos es infinito:

$$A_{exacta} = \lim_{n\to\infty}\left(\quad\right) = [\quad] = (\quad) = \quad u^2$$

Ejercicios Adicionales

En cada uno de los siguientes casos, calcula el área exacta bajo la curva para el número de rectángulos que se indica. Compara los resultados con el cálculo de áreas aproximadas que realizaste en los ejercicios de la página 23 y 41. Registra los resultados en las tablas y analiza las diferencias.

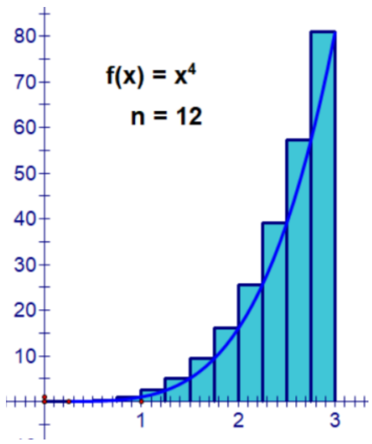
a)



Área por aproximación	Área Exacta

$A_T =$_________ u^2

b)



Área por aproximación	Área Exacta

$A_T =$_________ u^2

1.6 Teorema fundamental del cálculo integral

Introducción

El Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) fue descubierto independientemente por sir Isaac Newton (1642-1727) en Inglaterra, y por Gottfried Wilhelm Leibniz (1646-1716) en Alemania. Se les considera como los inventores del cálculo (o cálculo infinitesimal).

Dado que se señaló que se utiliza para evaluar integrales definidas, por lo tanto, es la base para resolver una amplia variedad de problemas; entre otros, problemas sobre área, volumen, longitud de una curva, superficies de revolución, trabajo, fuerza ejercida por un líquido, centro de masa y sobre muchos campos de la física, la ingeniería, la biología y la economía.

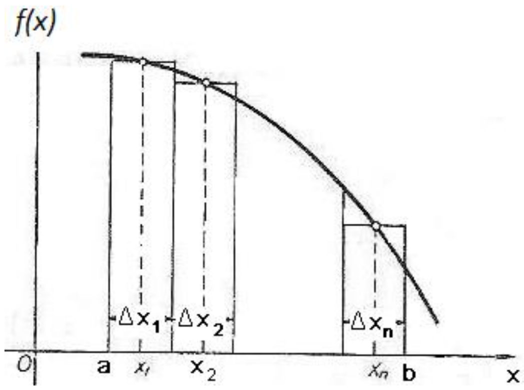
Actividades de Apertura

Lee con cuidado la siguiente definición.

Sea $f(x)$ una función continua en el intervalo desde $x = a$ hasta $x = b$. Divide este intervalo en "n" subintervalos cuyas longitudes son $\Delta x_1,\ \Delta x_2, \ldots, \Delta x_n$, y elije puntos, uno en cada subintervalo, que tengan las abscisas $x_1, x_2, \ldots\ x_n$, respectivamente. Considérese la suma.

$$f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1} + f(x_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$$

Exactamente el planteamiento que has desarrollado anteriormente en el cálculo de áreas bajo una curva empleando una cantidad infinita de rectángulos inscritos.



Nota que $f(x)$ es una "razón de cambio instantánea" $\frac{\Delta y}{\Delta x}$, porque Δx tiende a cero.

Entonces el valor límite de esta suma cuando "n" tiende a infinito y cada subintervalo (ancho de los rectángulos) tiende a cero, es igual al valor de la suma de $\sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i$, el área exacta bajo la curva.

En el cálculo integral, esta suma infinita se representa con la notación: $\int_a^b f(x)\, dx$. Y se llama Integral Definida.

El proceso de cálculo del área exacta y esta notación puede abreviarse como sigue:

$$A_{exacta} = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)\, dx$$

La importancia de este teorema resulta del hecho de que así podemos calcular, por integración, una magnitud que sea el límite de una suma de la forma:

$$f(x_1)\Delta x_1 + f(x_2)\Delta x_2 + \cdots + f(x_{n-1})\Delta x_{n-1} + f(x_n)\Delta x_n.$$

En el proceso de aumentar n al infinito puede observarse que, cada término de la suma (ancho de los rectángulos) es infinitamente pequeño, es decir, una expresión diferencial, puesto que las longitudes $\Delta x_1, \Delta x_2, \dots \Delta x_n$, tienden a cero. Además, cada término se llama un elemento de la magnitud que se trata de calcular.

Se puede observar que una integral es una suma de pequeños resultados parciales, es una suma finita de infinitas cantidades infinitamente pequeñas, y también que

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

en el entendido de que $F(x)$ es la función integrada, dicho de otro modo $\int_a^b f(x)\, dx = F(x)|_a^b = F(b) - F(a)$ lo cual, como se observará en la presente sección, también representa el área "exacta" bajo la curva de la función $f(x)$ en el intervalo desde "$x = a$" hasta "$x = b$".

Al igual que las Sumas de Riemann, en el cálculo integral, se emplean fórmulas específicas para los casos que se presentan con más frecuencia.

Por principio se observa que, dado que la integral es una operación inversa de la derivada, una "antiderivada", entonces, se podrán emplear fórmulas para integrar cualquier función algebraica o trascendente (logarítmicas, trigonométricas o exponenciales).

Actividades de Desarrollo

Observa puntualmente el proceso de solución al integrar una función, e intenta integrar las funciones en tu cuaderno, simultáneamente, que revisas el proceso paso a paso.

Primeras Fórmulas

1) $\int dv = v + C$

2) $\int a\,dv = a\int dv = av + C$

3) $\int v^n\,dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C, \qquad (n \neq -1)$

Ejemplo 1: Calcular la integral

$$\int x^3\,dx$$

Con base en los pasos para integrar una función, identificamos en la expresión dada la variable $v = x$, y el exponente $n = 3$, utilizamos la fórmula 3.

$$v = x \qquad n = 3 \qquad dv = dx$$

$$\int x^3\,dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} + c = \frac{x^4}{4} + c$$

En este caso se observa que el resultado expresado como $\frac{x^4}{4} + C$ se nombra *Integral Indefinida*, puesto que no se especificaron límites, sin embargo, si se especifican del siguiente modo $\int_1^3 x^3\,dx$, entonces se debe cerrar el proceso evaluando la expresión en los límites señalados, dado que el resultado fue: $\frac{x^4}{4}$ no se coloca $+C$, en lugar de esto, se sustituye la variable "x" por los valores indicados, primero el superior y luego el inferior, y se realiza la resta, del siguiente modo, $\frac{(3)^4}{4} - \frac{(1)^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = \frac{80}{4} = 20$ observa que se aplicó

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Ejemplo 2: Calcular la integral

$$\int_2^4 5my^2\,dy$$

Solución. Se observa que $5m$ es una constante que se encuentra como factor en el integrando $5my^2$; utilizando la fórmula 2, tenemos:

$$\int_2^4 \underset{a}{5m}\,\underset{v}{y}^2\underset{dv}{dy} = 5m\int_2^4 y^2dy$$

Luego, en la expresión resultante se tiene que la variable es $v = y$**,** el exponente $n = 2$, es decir: $v = y$ $\quad n = 2$ $\quad dv = dy$

aplicamos directamente la fórmula 3, resultando:

$$5m\int_2^4 y^2dy = 5m\left(\frac{y^{2+1}}{2+1}\right)_2^4 = 5m\left(\frac{y^3}{3}\right)_2^4$$

Observa que, primero se sustituye el límite superior y luego el inferior y se restan, es decir, se aplica

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$5m\left(\frac{4^3}{3}\right) - 5m\left(\frac{2^3}{3}\right) = 5m\left(\frac{64}{3}\right) - 5m\left(\frac{8}{3}\right) = 5m\left[\frac{64}{3} - \frac{8}{3}\right] = 5m\left(\frac{56}{3}\right) = \frac{280}{3}m$$

Nota que "m" es una constante cualquiera, simplemente se deja indicada.

Ejemplo 3: En la integral $\int_0^3 3y^4dy$ la variable es "y" su diferencial es dy, el "3" es constante, por lo tanto, se coloca fuera de la integral multiplicando *(según la fórmula 2)*, $3\int_0^3 y^4dy$, ahora se puede aplicar directamente la fórmula 3. $\int v^n\,dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C$

y resulta $$3\int_0^3 y^4dy = 3\left(\frac{y^{4+1}}{4+1}\right)_0^3 = 3\left(\frac{y^5}{5}\right)_0^3$$

ahora aplicamos el Teorema Fundamental del Cálculo

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

y resulta $$3\left(\frac{3^5}{5}\right) - 3\left(\frac{0^5}{3}\right) = 3\left(\frac{3^5}{5}\right) = 3\left(\frac{243}{3}\right) = 243$$

1.6.1. Cálculo de áreas bajo una curva a partir del Teorema Fundamental del Cálculo (TFC)

A continuación, veamos algunas aplicaciones prácticas:

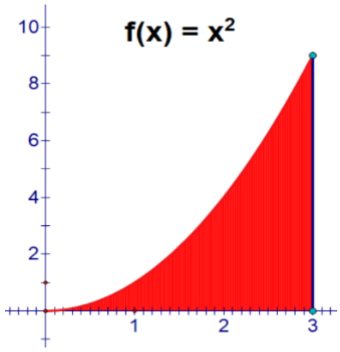
El área entre una curva, el eje de las "x" y las ordenadas correspondientes a $x = a$ y $x = b$ está dada por la fórmula

$$Área = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx$$

observa que debes sustituir el valor de "y" en términos de "x". O sea,

$$Área = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Ejemplo 4: Encuentra el área bajo la curva $y = x^2$, entre $x = 0$ y $x = 3$.



Utilizando $\lim\limits_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(x_i)\Delta x_i = \int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$, se muestra el proceso paso a paso $\int_0^3 (x)^2 dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} = \frac{x^3}{3}$ a continuación se aplica $F(b) - F(a)$ del siguiente modo: $F(b) = F(3) = \frac{3^3}{3} = 9$ y $F(a) = F(0) = \frac{0^3}{3} = 0$ realizando la resta

$F(b) - F(a) = 9 - 0$ resulta que el área correspondiente es $\boldsymbol{9u^2}$.

Ejemplo 5:

Matemáticamente hablando, para obtener la utilidad total se tiene que integrar la utilidad marginal, es decir, esta se representará por medio de una función que se tiene que integrar para conocer la utilidad total del producto.

Considera una empresa comercializadora de varios productos, entre ellos, pasta (espagueti) y vino de mesa. La utilidad marginal de cada caja de pasta está dada por $f(x) = 30 - 3x$.

Por su parte, la utilidad marginal del vino de mesa está dada por $g(x) = 20 - x$; se quiere encontrar:

a) La utilidad total de la pasta cuando comercializa 4 paquetes de pasta.
b) La utilidad total del vino, cuando comercializa 4 cajas de vino.

Solución a):

Utilizando el teorema fundamental del cálculo $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$, se muestra el proceso paso a paso $\int_0^4 (30 - 3x)dx$

se separa en dos partes esta integral (fórmula 3)

$\int_0^4 30dx - \int_0^4 3xdx = 30\int_0^4 dx - 3\int_0^4 xdx =$

se integra la primera y luego la segunda expresión, resultando

$\left|30x - 3\left(\frac{x^2}{2}\right)\right|_0^4$ ahora se sustituyen los límites y se aplica

$$F(b) - F(a),\ \ F(b) = F(4) = 30(4) - 3\left(\frac{4^2}{2}\right) = 120 - 24 = 96.$$

Ahora calculamos $F(a) = F(0) = 30(0) - 3\left(\frac{0^2}{2}\right) = 0$

se resta al resultado de la función evaluada en el límite superior, el correspondiente resultado del límite inferior $96 - 0 = 96$.

Por lo tanto, **las utilidades al vender 4 cajas de pasta son de $ 96.**

Solución b):

Utilizando el teorema fundamental del cálculo $\int_a^b f(x)dx = F(a) - F(b)$, se muestra el proceso paso a paso $\int_0^4 (20 - 2x)dx$ se separa en dos partes ésta integral (fórmula 3) $\int_0^4 20dx - \int_0^4 2xdx = 20\int_0^4 dx - 2\int_0^4 xdx$ se integra la primera y luego la segunda expresión, resultando $\left|20x - 2\left(\frac{x^2}{2}\right)\right|_0^4$ ahora se sustituyen los límites y se aplica

$F(b) - F(a), F(b) = F(4) = 20(4) - 2\left(\frac{4^2}{2}\right) = 80 - 16 = 64.$

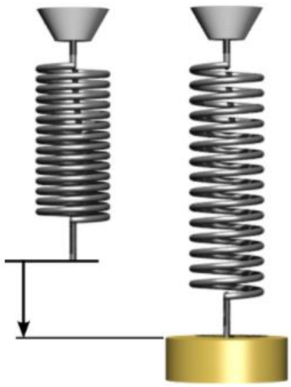
Ahora calculamos $F(a) = F(0) = 20(0) - 2\left(\frac{0^2}{2}\right) = 0$, se resta al resultado de la función evaluada en el límite superior, el correspondiente resultado del límite inferior

$$64 - 0 = 64.$$

Por lo tanto, **las utilidades al vender 4 cajas de vino son de $ 64.**

Veamos otras aplicaciones:

Ejemplo 6: El trabajo W realizado al mover un objeto del punto con coordenada "a" al punto con coordenada "b", está dado por $W = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$.



Estirar un pequeño resorte desde una posición a hasta una b responde a la ley de Hooke, que para este resorte tiene la forma $f(x) = \frac{9}{2}x$, inicialmente el resorte tiene una longitud de $6\ cm$.

a) Calcula el trabajo realizado para estirar el resorte desde su posición inicial hasta $10\ cm$.

b) Calcula el trabajo realizado para estirar el resorte desde una posición inicial de $7\ cm$ hasta $9\ cm$.

Solución a):

Utilizando el teorema fundamental del cálculo $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, se muestra el proceso paso a paso $\int_0^4 \frac{9}{2}x\ dx = \frac{9}{2}\int_0^4 x\ dx = \left|\frac{9}{2}\frac{x^2}{2}\right|_0^4 =$

ahora se sustituyen los límites y se aplica $F(b) - F(a)$

$$F(b) = F(4) = \frac{9}{2}\left(\frac{4^2}{2}\right) = \frac{9}{2}\left(\frac{16}{2}\right) = \frac{9}{2}(8) = 36$$

Ahora calculamos $F(a) = F(0) = \frac{9}{2}\left(\frac{0^2}{2}\right) = \frac{9}{2}\left(\frac{0}{2}\right) = \frac{9}{2}(0) = 0$

a continuación, se resta al resultado de la función evaluada en el límite superior, el correspondiente resultado del límite inferior $36 - 0 = 36$.

Por lo tanto, el trabajo realizado para estirar el resorte desde su posición inicial hasta 10 cm **es de 36 unidades,** en este caso no se especificaron las unidades desde un inicio, por lo tanto, lo dejaremos así.

Solución b):

Utilizando el teorema fundamental del cálculo $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$, se muestra el proceso paso a paso $\int_1^3 \frac{9}{2}xdx = \frac{9}{2}\int_1^3 x\ dx = \left|\frac{9}{2}\frac{x^2}{2}\right|_1^3 =$

ahora se sustituyen los límites y se aplica $F(b) - F(a)$,

$$F(b) = F(3) = \frac{9}{2}\left(\frac{3^2}{2}\right) = \frac{9}{2}\left(\frac{9}{2}\right) = \frac{81}{4}$$

Ahora calculamos $F(a) = F(1) = \frac{9}{2}\left(\frac{1^2}{2}\right) = \frac{9}{2}\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{9}{4}$

a continuación, se resta al resultado de la función evaluada en el límite superior, el correspondiente resultado del límite inferior $\frac{81}{4} - \frac{9}{4} = 18$.

Por lo tanto, el trabajo realizado para estirar el resorte desde $7\ cm$ hasta $9\ cm$, es de **18 unidades**, en este caso no se especificaron las unidades desde un inicio, por lo tanto, lo dejaremos así.

Para un objeto con movimiento rectilíneo la función posición $s(t)$, y la función velocidad $v(t)$, se relacionan por $s(t) = \int v(t)\, dt$, de este hecho y el teorema fundamental del cálculo, se obtiene $s(t)]_{t_1}^{t_2} = \int_a^b v(t)dt = s(b) - s(a)$ en el entendido que "a" corresponde a tiempo 1 (inicial) y "b" corresponde a tiempo 2 (final). De este modo, $s(t_1)$ es la posición inicial y $s(t_2)$ es posición final.

Ejemplo 7: Un objeto se mueve con movimiento rectilíneo de modo tal que, su velocidad en el instante t es $v(t)\ = t^2 + 2t\ {}^{m}/_{s}$. Encuentra:

a) La distancia recorrida del objeto durante los tres primeros segundos.

Solución:

$$[s(t)]_{t_1}^{t_2} = \int_0^3 v(t)dt = s(3) - s(0) = \int_0^3 (t^2 + 2t)dt = \int_0^3 (t^2)dt + \int_0^3 (2t)dt$$

$$= \left|\frac{t^3}{3} + 2\left(\frac{t^2}{2}\right)\right|_0^3$$

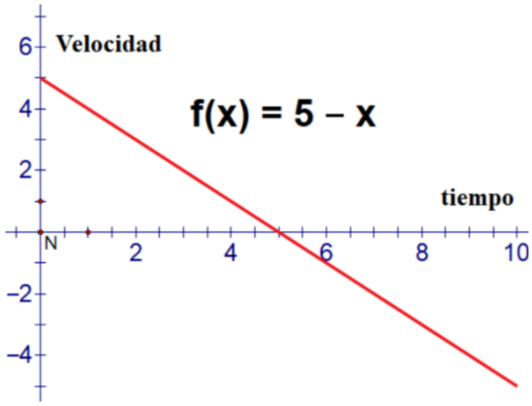
a continuación, realizamos $s(b) - s(a)$ sustituyendo primero el límite superior y luego el inferior,

$$s(3) - s(0) = \frac{3^3}{3} + 2\left(\frac{3^2}{2}\right) - \left[\frac{0^3}{3} + 2\left(\frac{0^2}{2}\right)\right] = 9 + 9 - 0 = 18.$$

Distancia recorrida: $18\ m$

Ejemplo 8:

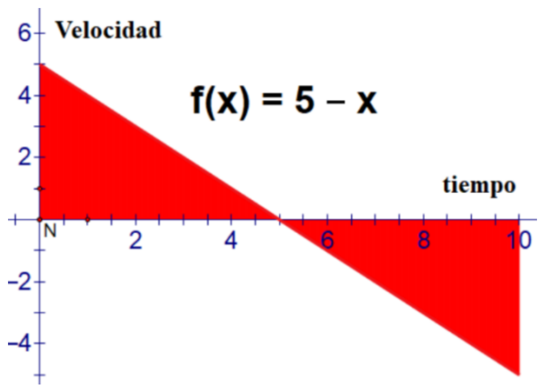
Una partícula se mueve en una línea recta con velocidad $v(t) = 5 - t\ {}^{m}/_{s}$, donde t es el tiempo en segundos. A continuación, se muestra la gráfica de la función $v(t)$.



Que la velocidad sea positiva, significa que la partícula se mueve hacia adelante sobre la recta, y que la velocidad sea negativa, significa que la velocidad se mueve hacia atrás. Digamos que se nos pregunta por el *desplazamiento* de la partícula (es decir, el cambio en su posición) entre $t = 0$ segundos y $t = 10$ segundos. Como la velocidad es la *razón de cambio* de la posición de la partícula, cualquier cambio en la posición de la partícula está dado por una integral definida.

Específicamente buscamos

$$\int_0^{10} v(t)dt$$

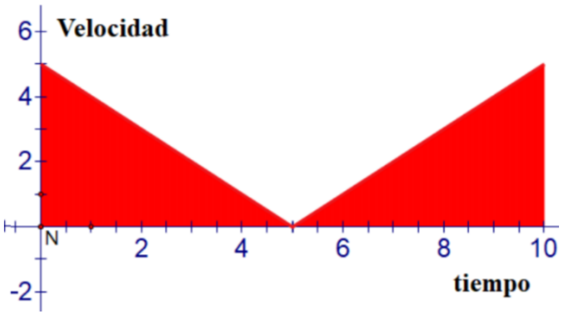


Curiosamente, el desplazamiento es $\int_0^{10} v(t)dt = 0$, metros (Puedes ver cómo las dos áreas en la gráfica son iguales y de signos opuestos).

Que el desplazamiento sea 0, significa que la partícula ocupa la misma posición en los tiempos $t = 0$, y $t = 10$ segundos. Esto tiene sentido cuando ves que la partícula primero se mueve hacia adelante y después hacia atrás, regresando a su posición inicial.

Sin embargo, la partícula *sí se movió*. Digamos que queremos conocer la *distancia total* que recorrió la partícula, aún cuando terminó en el mismo lugar. ¿Nos pueden ayudar las integrales definidas?

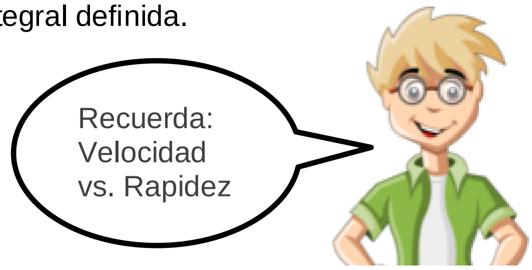
Sí, sí pueden. Para lograrlo, usaremos una manipulación ingeniosa. En lugar de trabajar con la *velocidad* de la partícula, trabajaremos con su *rapidez* $|v|$ (es decir, el valor absoluto de v).



La rapidez describe qué tan rápido vamos, mientras que la velocidad describe qué tan rápido *y* en qué dirección. Cuando el movimiento es sobre una recta, la velocidad puede ser negativa, pero la rapidez siempre es positiva (o cero). Así que la rapidez es el valor absoluto de la velocidad.

Ahora que conocemos la *rapidez* de la partícula en todo momento, podemos encontrar la *distancia total* que recorrió al calcular la integral definida.

$$\int_0^{10} |v(t)|dt$$



Esta vez el resultado es el valor positivo "*25 metros*".

La velocidad es la razón de cambio en la posición, por lo que, su integral definida nos da el *desplazamiento* de un objeto en movimiento. La rapidez es la razón de cambio de la *distancia total*, por lo que su integral definida nos da la distancia total recorrida, sin importar la posición.

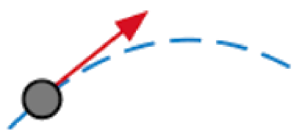
Actividades de Cierre

Resuelve los siguientes ejercicios:

1. Encuentra el área bajo la curva de la función $f(x) = x^3$, entre $x = 1$ y $x = 3$.
2. Hallar las áreas de las superficies limitadas por las siguientes curvas, el eje de las "x" y las ordenadas que se indican. En cada problema trazar la figura, mostrando el elemento de área.
   a) $y^2 = 6x$, entre $x = 0$ y $x = 6$
   b) $y = x^3 + 3$ desde $cero$ hasta $x = 2$
3. En el entendido de que $\int_a^b \operatorname{sen} x \; dx = [\cos x]_a^b$, calcula el área de una arcada senoidal, entre $x = 0$ y $x = \pi$. Bosqueja la gráfica del área hallada.
4. Considera una empresa que comercializa varios productos, entre ellos, gomas y lápices. La utilidad marginal de las gomas está dada por $f(x) = 4x - 2$.

Por su parte la utilidad marginal de los lápices está dada por $g(x) = 3 - 5x$; se quiere encontrar:
   a) La utilidad total de ambos productos cuando se compran 2 unidades de cada producto.
   b) ¿Cuál producto ofrece mayor satisfacción cuando se compran 2 unidades de cada producto?
5. Un resorte ejerce una fuerza de $50\ Newtons$ cuando se estira $10\ metros$ más allá de su punto de equilibrio. Determina la constante del resorte, y calcula el trabajo requerido para estirar el resorte $18\ metros$ más allá de su punto de equilibrio.

   Según la ley de Hooke, $F = k\,L$ despejando $k = \frac{F}{L}$, por lo tanto, la constante del resorte $k = 5$, y la función $f(x) = 5x$, queda por resolver $\int_0^{18} 5x\,dx$.
6. Una partícula se mueve en una línea recta con velocidad $v(t) = 2t^2 - 5t$, dada en metros por segundo, donde t es el tiempo en segundos. En $t = 0$ la partícula inicia en el punto de partida.

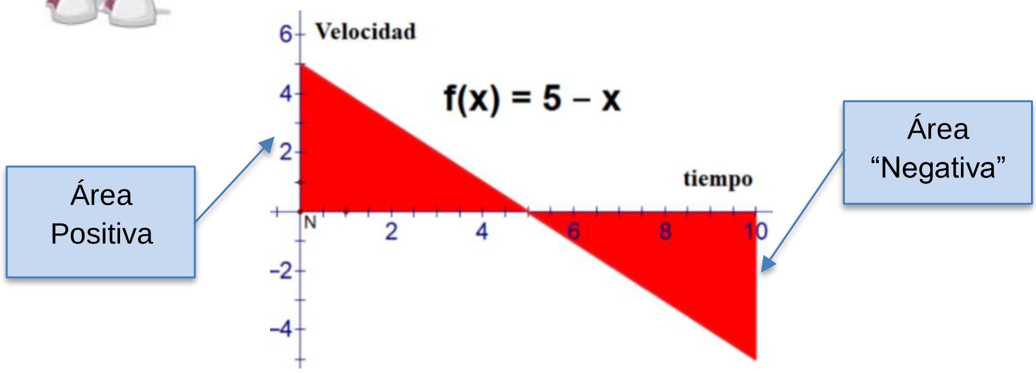


   a) ¿Cuál es la posición de la partícula en $t = 4$ segundos?
   b) ¿Qué distancia recorre la partícula en los 4 primeros segundos?
7. La velocidad de una partícula que se mueve sobre el eje x es $v(t) = t^2 + t$. En $t = 1$, su posición es 1. ¿Cuál es la posición de la partícula $s(t)$, para cualquier tiempo t?

1.6.2. Cálculo de áreas Negativas.

Introducción

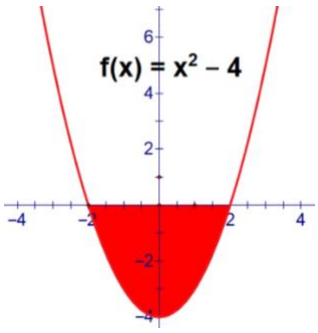
Ahora que has aprendido a calcular áreas bajo una curva, abordaremos casos particulares donde es necesario aplicar algunos procedimientos adicionales a fin de dar explicación lógica a nuestros resultados. De hecho, habrás notado algo raro en el titulo de este apartado. En la realidad no existen las áreas negativas, pero en Calculo Integral, cuando la región a la que determinamos el área está por debajo del eje las abscisas, la integral proporciona un valor negativo, como sucedió en el ejemplo de la partícula en movimiento estudiado en la unidad anterior.



Estos resultados solo denotan la posición relativa de la curva con respecto al eje x y no necesariamente se interpretan como una situación imposible en la vida cotidiana.
En este apartado estudiaremos como proceder cuando se presenten casos similares.

Actividades de Apertura

Ejemplo 1: Determina el área entre la gráfica de la función $y = x^2 - 4$ y el eje x, y el intervalo desde $x = -2$ hasta $x = 2$.



Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\int_a^b y dx = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

$$\int v^n\, dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C, \qquad (n \neq -1)$$

$$Area = \int_a^b y dx = \int_{-2}^{2} (x^2 - 5)dx = \left[\frac{x^{2+1}}{2+1} - 5x\right]_{-2}^{2} = \left[\frac{x^3}{3} - 5x\right]_{-2}^{2} =$$

$$= \left[\frac{2^3}{3} - 5(2)\right] - \left[\frac{(-2)^3}{3} - 5(-2)\right] = [-7.33] - [7.33] = -14.66$$

En el cálculo integral, el signo del resultado significa que el área calculada está por debajo del eje x. Para solventar esta situación, suele aplicarse el siguiente razonamiento: *El Teorema fundamental del Cálculo nos indica que para el cálculo de áreas, se tiene que*:

$$Area = \int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$$

Si se invierte el orden de los límites de integración a y b, el área calculada cambia de signo al invertirse el orden en la resta:

$$Area = \int_b^a f(x)dx = F(a) - F(b)$$

Se deduce entonces que:

$$Area = \int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)\, dx$$

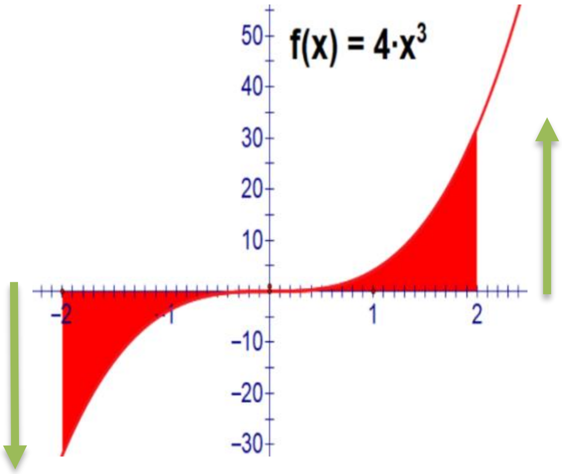
.

Recuerda que esta propiedad se emplea en los casos en que una función tenga intervalos en los que las áreas calculadas se encuentren por debajo del eje x, como el en el ejemplo anterior.

Actividades de Desarrollo

Para entender un poco mejor la aplicación de la propiedad anterior, analicemos el siguiente:

Ejemplo: Calcula el área sombreada de la siguiente gráfica:



Valores de la función positivos por arriba de x ∴ alturas positivas.

Valores de la función positivos por debajo de x ∴ alturas negativas.

Como el área se encuentra en el intervalo entre $a = -2$ y $b = 2$, aplicamos el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$Area = \int_{-2}^{2} 4x^3\,dx = [x^4]_{-2}^{2} = (2)^4 - (-2)^4 = 16 - 16 = 0$$

¿Por qué sucede esto? Estamos sumando dos áreas iguales, pero de diferente signo. En este caso, resulta más conveniente considerarla por separado.

El área a la izquierda del origen y que se encuentra bajo el eje x se calcula:

$$Area = \int_{-2}^{0} 4x^3\,dx = [x^4]_{-2}^{0} = (0)^4 - (-2)^4 = -16\,u^2$$

El área a la derecha del origen y por arriba de x se calcula:

$$Area = \int_{0}^{2} 4x^3\,dx = [x^4]_{0}^{2} = (2)^4 - (0)^4 = 16\,u^2$$

Si sumamos ambos valores el resultado sería cero, lo que evidentemente es un error, por lo que debemos invertir el orden de los límites de integración en la primera integral.

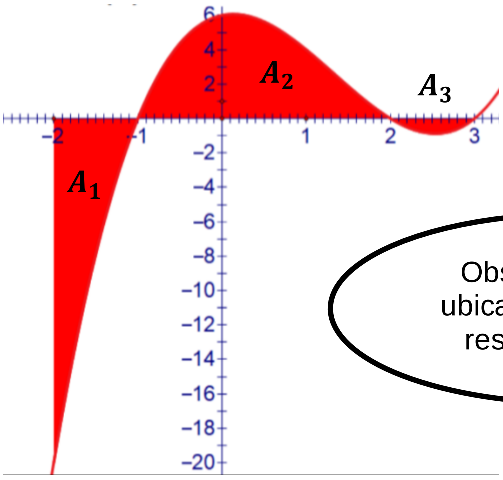
$$Area = \int_{0}^{-2} 4x^3\,dx = [x^4]_{0}^{-2} = (-2)^4 - (0)^4 = 16\,u^2$$

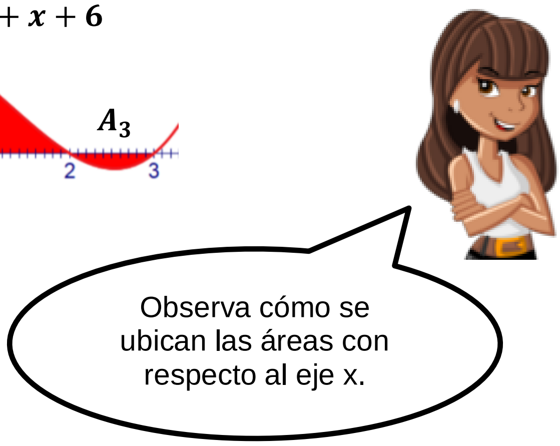
Sumando ambas áreas el resultado es $32\,u^2$.

Actividades de Cierre

Calcula el área sombreada en la gráfica siguiente. Registra en cada paso del procedimiento, lo que se te pide.

$$f(x) = x^3 - 4x^2 + x + 6$$





1. ¿En cuántos intervalos se compone el área total de la figura? ________________ .

2. El área de la función se encuentra por debajo de x en los intervalos entre

   $a =$____ y $b =$____, y entre $a =$____ y $b =$____.

3. El área de la función se encuentra por arriba de x, en el intervalo entre $a =$____ y $b =$____ .

4. ¿En qué intervalos, el área por calcular resultará en un valor negativo?

5. ¿En qué intervalos, el área por calcular resultará en un valor positivo?

6. Plantea el cálculo de las áreas en cada intervalo en que se compone el área total.

   a) $A_1 = \int_{[\ \ ]}^{[\ \ ]} [\quad]\, dx =$

   b) $A_2 = \int_{[\ \ ]}^{[\ \ ]} [\quad]\, dx =$

   c) $A_3 = \int_{[\ \ ]}^{[\ \ ]} [\quad]\, dx =$

8. Invierte el orden de los límites de integración a las que representen en el gráfico, regiones de área por debajo de x para evitar resultados negativos.

a) $A_1 = \int_{[\ \ ]}^{[\ \ ]} [\ \ \ ]\, dx =$

b) $A_2 = \int_{[\ \ ]}^{[\ \ ]} [\ \ \ ]\, dx =$

c) $A_3 = \int_{[\ \ ]}^{[\ \ ]} [\ \ \ ]\, dx =$

9. Resuelve las tres integrales aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo:

a) $A_1 = \int_{[\ \ ]}^{[\ \ ]} [\ \ \ ]\, dx =$

b) $A_2 = \int_{[\ \ ]}^{[\ \ ]} [\ \ \ ]\, dx =$

c) $A_3 = \int_{[\ \ ]}^{[\ \ ]} [\ \ \ ]\, dx =$

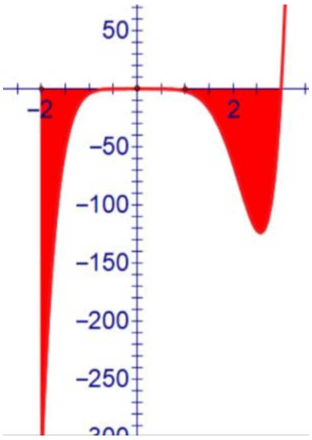
10. Determina el área total $A_T = A_1 + A_2 + A_3 =$ ________ u^2

Ejercicios Adicionales

Indicaciones: Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo, determina el área sombreada en las siguientes figuras considerando positivas (cambiar signo o invertir los límites a y b como en la explicación), las que se ubican por debajo del eje x.

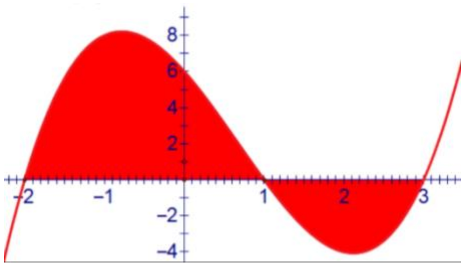
a)

$$f(x) = x^7 - 3x^6$$



b)

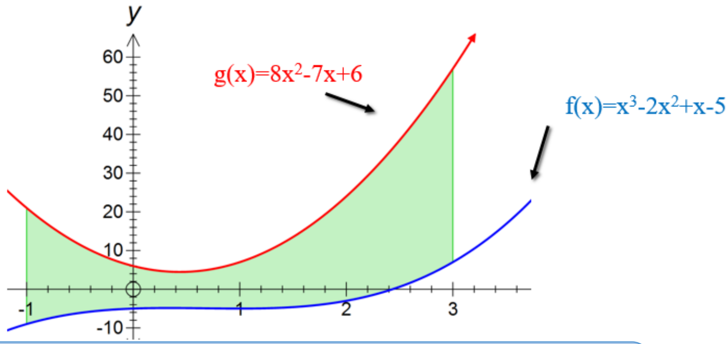
$$f(x) = x^3 - 2x^2 - 5x + 6$$



1.6.3. Cálculo de áreas entre dos curvas.

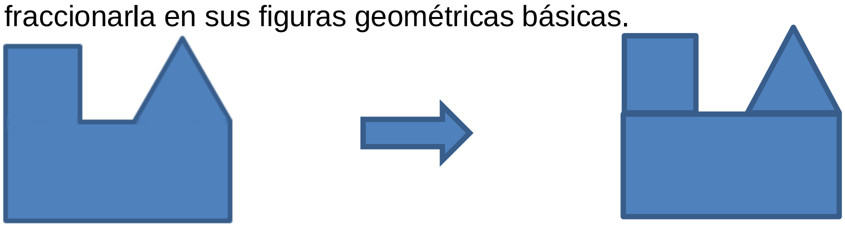
Introducción

En algunos casos, tendremos la necesidad de calcular un área que no se encuentre entre la gráfica de la función y el eje x, como hemos estudiado hasta ahora. Problemas, como la determinación del área sombreada en la siguiente figura, serán de tu dominio al terminar esta unidad de estudio.

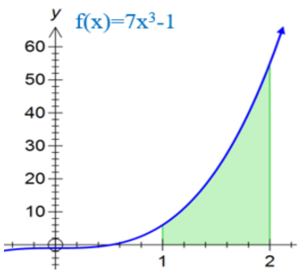


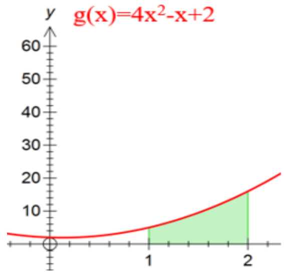
Actividades de Apertura

En geometría básica aprendimos que, para calcular el área de ciertos cuerpos geométricos compuestos, es más conveniente reducirlos primero a sus componentes básicos. Por ejemplo, para el cálculo del área de la figura de la izquierda, resulta más conveniente fraccionarla en sus figuras geométricas básicas.



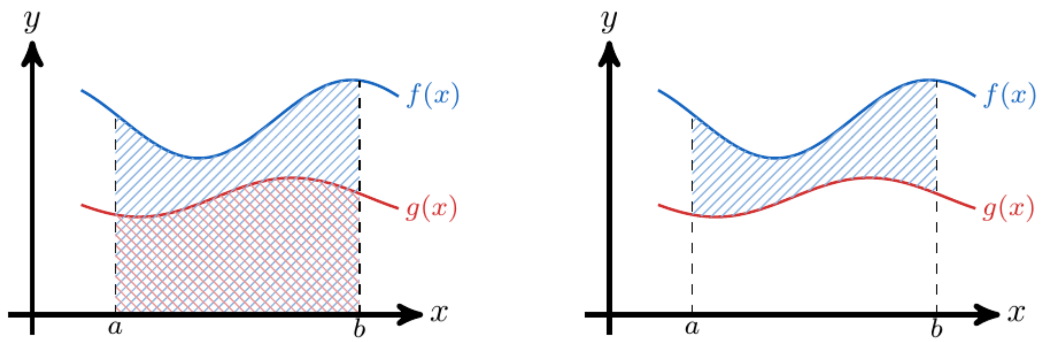
Con el mismo razonamiento lógico podemos encontrar áreas de figuras más complejas, siempre y cuando, conozcamos la relación que guardan las funciones que las delimitan; por ejemplo, aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo hemos aprendido a determinar áreas bajo la curva como las siguientes:





El área formada entre dos curvas para cierto intervalo puede obtenerse, si calcula la diferencia entre las áreas bajo cada curva, entre el intervalo de referencia.

Es posible determinar el área entre dos curvas, basándose en la forma que calculamos la longitud de un intervalo, es decir, tomando el valor más grande y restándole el valor más pequeño. De esta forma, si consideramos dos funciones $f(x) \geq g(x)$ continuas en un intervalo $[a, b]$, podemos calcular el área encerrada entre las curvas que definen, tomando el área de la función $f(x)$ que está por encima y le restamos el área de la función $g(x)$ que está por debajo.



Por lo tanto, calculamos el área entre las curvas que definen las funciones $f(x)$ y $g(x)$ de la siguiente forma:

$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx$$

Como ambas integrales tienen los mismos límites de integración, el cálculo de área entre las curvas se puede reducir a una sola operación de integración:

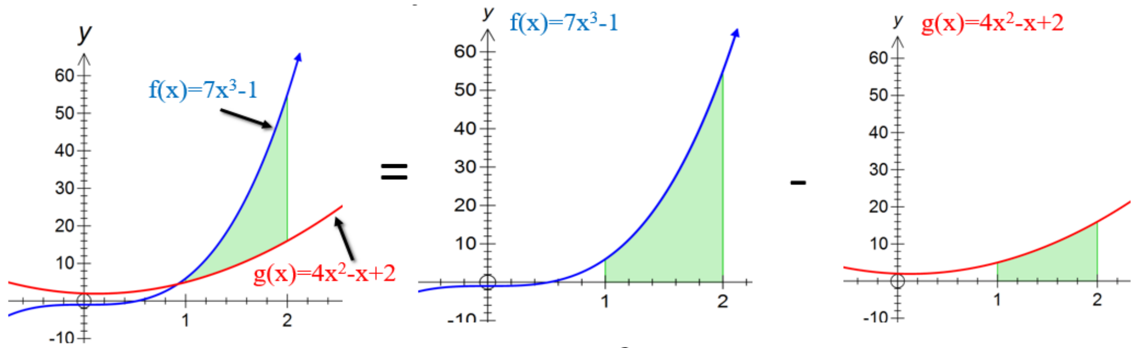
$$\int_a^b f(x)\,dx - \int_a^b g(x)\,dx = \int_a^b [f(x) - g(x)]\,dx$$

Actividades de Desarrollo

Para llevar a la práctica lo planteado anteriormente, considera los siguientes ejemplos:

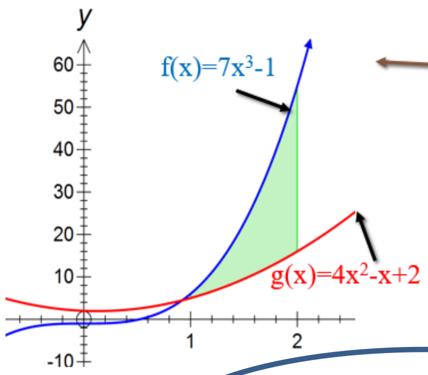
Ejemplo 1: El área comprendida entre las curvas de las funciones $f(x) = 7x^3 - 1$ y $g(x) = 4x^2 - x + 2$.

Al graficar ambas funciones, podemos plantear la solución restando el área de la función menor de la mayor:



$Area\ entre\ las\ curvas$ = $Area\ 1 = \int_1^2 (7x^3-1)dx$ - $Area\ 2 = \int_1^2 (4x^2-x+2)dx$

De la misma manera, podemos hacer la operación de resta en la misma integral:



La función $f(x)=7x^3-1$
Es mayor en el intervalo
entre a=1 y b=2

Sustituir un valor dentro del intervalo en cada función para identificar la mayor y la menor

$$Area = \int_1^2 [7x^3-1 - (4x^2-x+2)]dx$$

Observa que en ambos planteamientos se obtiene el mismo resultado.

$$Área = \int_1^2 [7x^3 - 4x^2 + x - 3]\ dx = 7\int_1^2 x^3\ dx - 4\int_1^2 x^2\ dx + \int_1^2 x\ dx - 3\int_1^2 dx$$

$$Área = \left[\frac{7x^4}{4} - \frac{4x^3}{3} + \frac{x^2}{2} - 3x\right]_1^2$$

$$Área = \left[\frac{7(2)^4}{4} - \frac{4(2)^3}{3} + \frac{(2)^2}{2} - 3(2)\right] - \left[\frac{7(1)^4}{4} - \frac{4(1)^3}{3} + \frac{(1)^2}{2} - 3(1)\right] = 15.41\ u^2$$

Ejemplo 2: Calcular el área de la región que está acotada por las dos curvas:

$$y = x^2 + 2 \quad \text{y} \quad y = -x$$

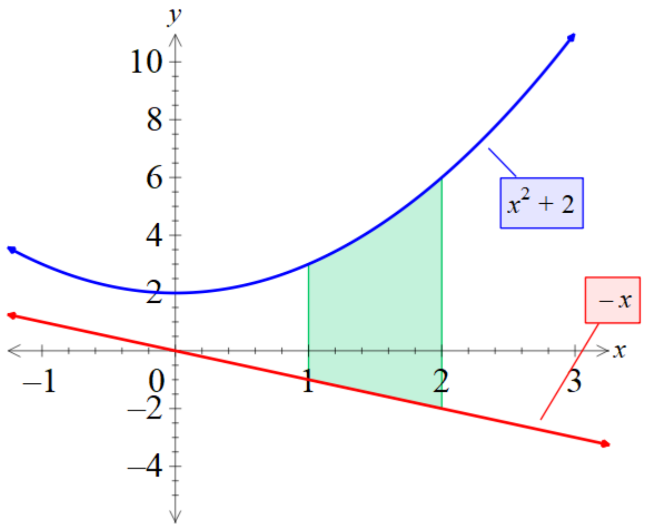
y las dos rectas: $x = 0 \;\; \text{y} \;\; x = 1$

Solución:

Primero hacemos las gráficas con sus tablas para que puedas observar algunos datos importantes:

$\boldsymbol{y = x^2 + 2}$			
x	-1	0	1
y	3	2	3

$\boldsymbol{y = -x}$			
x	-1	0	1
y	1	0	-1



Tomamos $f(x) = x^2 + 2$ y $g(x) = -x,$ y tenemos que $f(x) = x^2 + 2 \geq g(x) = -x$ para toda x en el intevalo cerrado $[0,1]$.

Aplicamos la fórmula para el área entre dos curvas:

$$Área = \int_a^b [f(x) - g(x)] \; dx$$

$$Área = \int_1^2 [(x + 2) - [-x]] \, dx = \int_1^2 (x^2 + x + 2) \; dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2} + 2x\right]_1^2 =$$

$$Área = \left[\frac{(2)^3}{3} + \frac{(2)^2}{2} + 2(2)\right]_1^2 - \left[\frac{(1)^3}{3} + \frac{(1)^2}{2} + 2(1)\right] = 8.66 - 2.83 = 5.82 \; u^2$$

Analicemos otros ejercicios para poder practicar.

Ejemplo 3:

Calcular el área de la región acotada por la curva $g(x) = 2 - x^2$ y la recta $f(x) = x$.

En este caso no nos proporcionan los puntos de intersección.

Solución:

Los límites a y b están determinados por los puntos de intersección de las curvas f y g. Para hallarlos, es necesario igualar ambas ecuaciones entre sí y despejar x, es decir:

$x = 2 - x^2$

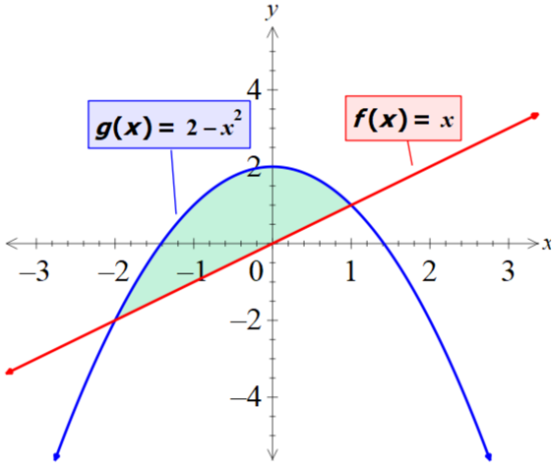
$x^2 + x - 2 = 0$

$(x + 2)(x - 1) = 0$

De donde:

$x + 2 = 0$, por lo tanto, $x = -2$

$x - 1 = 0$, por lo tanto, x $= 1$



Para determinar cuál función es mayor, en este intervalo damos valores a ambas:

x	-2	-1	0	1
$g(x)$	-2	1	2	1
$f(x)$	-2	-1	0	1

Como $g(x) > f(x)$ sobre el intervalo cerrado $[-2,1]$, tenemos:

$$Área = \int_a^b [g(x) - f(x)]\ dx$$

$$Área = \int_{-2}^{1} [(2 - x^2) - x]\ dx = \int_{-2}^{1} (2 - x^2 - x)\ dx = \left[2x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{2}\right]_{-2}^{1} =$$

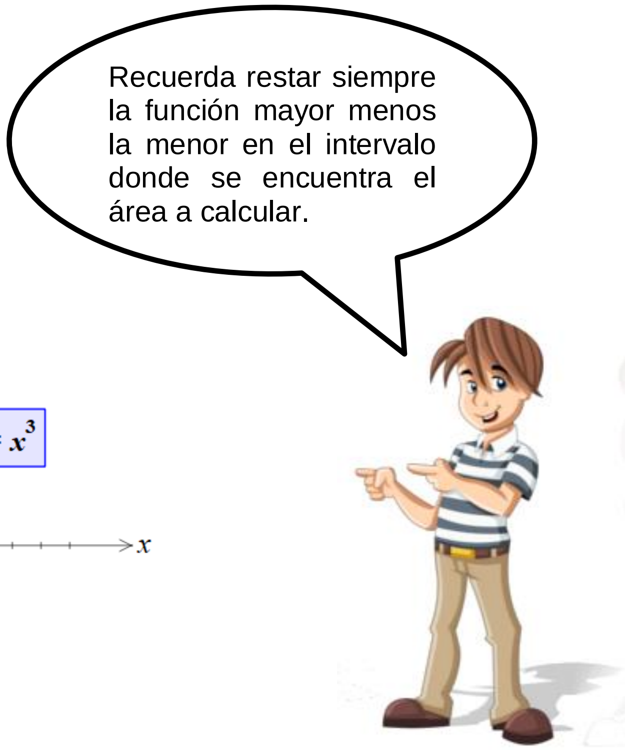
$$Área = \left[2(1) + \frac{(1)^3}{3} + \frac{(1)^2}{2}\right] - \left[2(-2) + \frac{(-2)^3}{3} + \frac{(-2)^2}{2}\right] = \frac{9}{2} = 4.5u^2$$

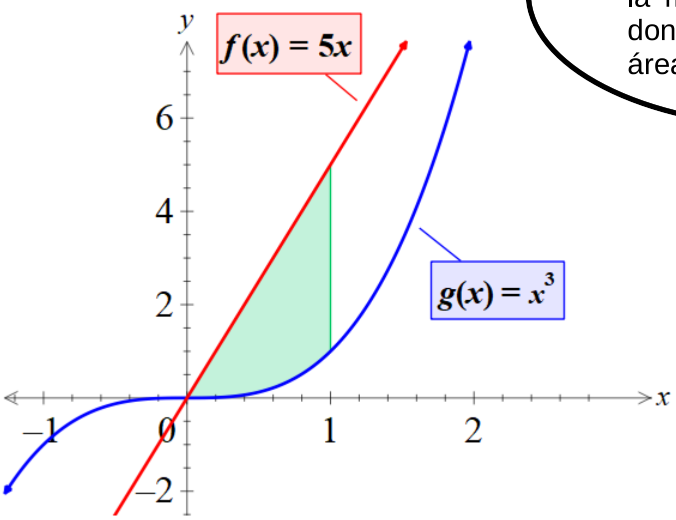
Una de las soluciones rápidas que estamos usando, es restar a la función de mayor valor en el intervalo, la de menor valor, o bien, que aparece arriba de la que esta abajo, después aplicar el Teorema Fundamental del Cálculo.

Actividades de Cierre

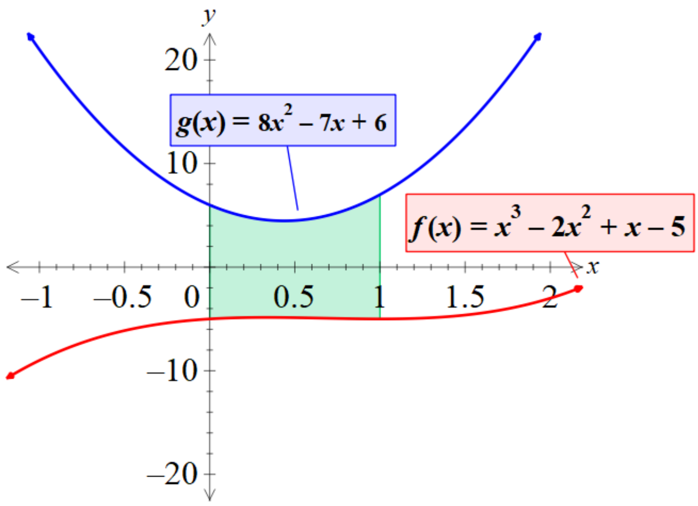
Realiza los siguientes ejercicios en tu cuaderno:

1. Aplicando el Teorema Fundamental del Cálculo, determina el área sombreada en las siguientes figuras:





2. Analiza la siguiente gráfica y calcula el área sombreada.



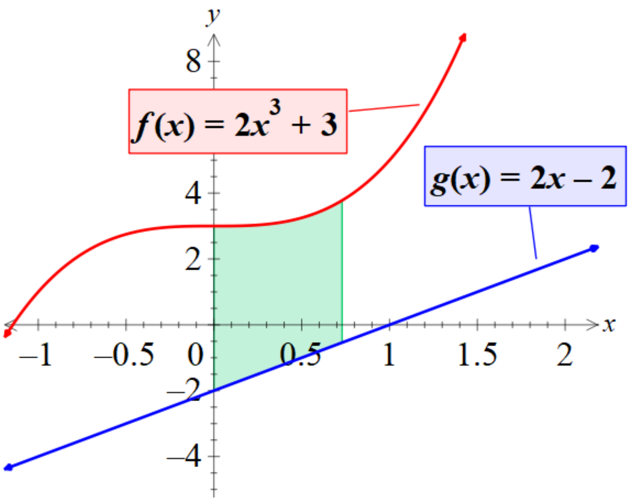
Ejercicios Adicionales

Te presentamos otros ejercicios adicionales para que puedas practicar.

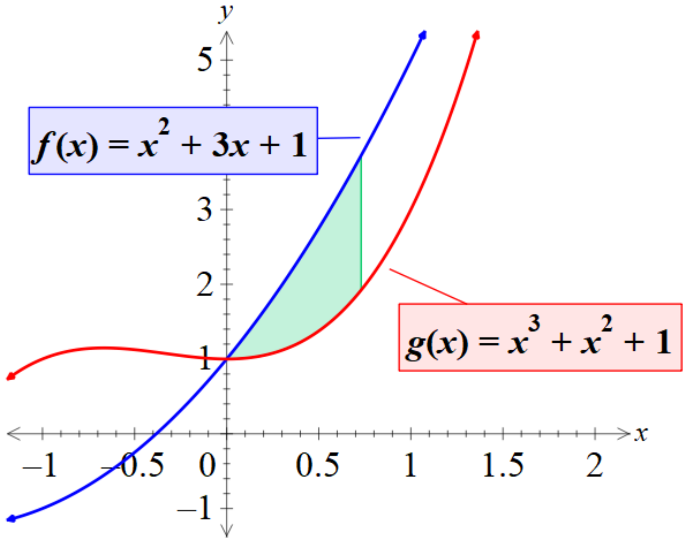
1. Calcula el área de la región limitada por la curva $y = x^2 - 3x - 4$ y el eje "x".

2. Determina el área sombreada en cada uno de los siguientes casos:

a)



b)



Unidad 2. Integral Indefinida

2.1. La Antiderivada

Introducción

Como recordarás, en las matemáticas existen operaciones inversas: la adición y la sustracción son operaciones inversas, al igual que la división y la multiplicación, y lo mismo puede decirse de elevar una potencia y extraer la raíz correspondiente. En el cálculo diferencial se estudia el problema para obtener la derivada $f'(x)$ de una función $f(x)$. Ahora nos ocuparemos del problema inverso, es decir, dada la derivada $f'(x)$ de una función, buscaremos obtener la función $f(x)$.

La integración tiene dos interpretaciones distintas: como procedimiento inverso de la diferenciación y como método para determinar el área bajo la curva, cada una de estas interpretaciones tiene numerosas aplicaciones.

En primer término, la integración puede considerarse como el proceso inverso de la diferenciación, esto es, si una función es derivada y luego se integra la función obtenida, el resultado es la función original; siempre y cuando se especifique de manera precisa la constante de integración, ya que de otra forma el resultado puede diferir de la función original en una constante.

Ahora recordemos los tipos de funciones:

Función inicial o primitiva: $y = f(x)$

Función derivada: $\frac{dy}{dx} = f'(x)$

Función diferencial: $dy = f'(x)\,dx$

El problema fundamental del cálculo integral depende de la operación inversa a la diferenciación, es decir:

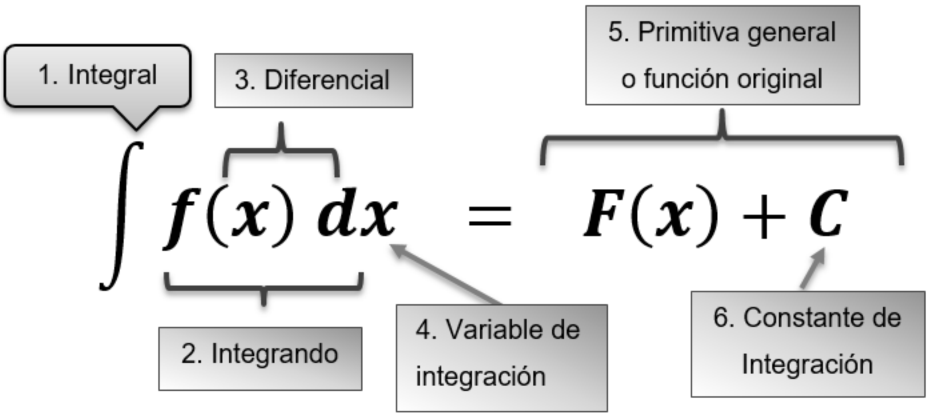
Hallar una función primitiva: $y = f(x)$

Si conocemos la función diferencial: $dy = f'(x)\,dx$

En este contexto, la integración se considera como la operación de obtener una función cuando se conoce su derivada. Es decir, la Antiderivada.

Si integro la derivada de una función, obtengo la función original y viceversa, por ejemplo: ¿Cuál es la derivada de x^2? $2x$, por lo tanto $\int 2x\,dx = x^2$.

Elementos de la Integral indefinida:



Actividades de Apertura

Ya estudiamos los elementos de la Integral indefinida, ahora comprobemos los conceptos explicados anteriormente respondiendo a la siguiente interrogante:

¿Por qué se suma una constante de integración?

Porque la derivada de una constante es cero, por ejemplo, calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x^2$ ....

b) $f(x) = x^2 + 3$ ....

c) $f(x) = x^2 + 6$ ....

d) $f(x) = x^2 + 8$ ....

e) $f(x) = x^2 + c$ ....

Como puedes observar, en todos los casos la derivada es $2x$ y como la integral de una función obtiene la función original, entonces $\int 2x\,dx = x^2 + c$ y de esa manera ser precisamente la inversa de la derivada.

Actividades de Desarrollo

Calcula la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = x$ _______________

b) $f(x) = x + 1$ _______________

c) $f(x) = x + 4$ _______________

d) $f(x) = x + 9$ _______________

e) $f(x) = x + c$ _______________

Entonces, ¿a qué es igual la siguiente integral?

$$\int 1\,dx = \int dx = ?$$

Precisamente esa es la primera fórmula de integración algebraica:

$$\int dx = x + c$$

Determina la derivada de las siguientes funciones:

a) $f(x) = 5x + 3$: $f'(x) =$ ________
b) $f(x) = 8x + 5$: $f'(x) =$ ________
c) $f(x) = 12x - 8$: $f'(x) =$ ________
d) $f(x) = 15x + 10$: $f'(x) =$ ________
e) $f(x) = cx + c$: $f'(x) =$ ________

¿Cuál es la fórmula de antiderivada que nos permite relacionar todas las derivadas anteriores?

____

De las derivadas del tipo de funciones como las que acabas de calcular, es que surge la fórmula de integración correspondiente, para el caso anterior se deduce que:

$$\int kdv = kv + c$$

Determina la derivada de las funciones siguientes:

a) $f(x) = 3x^3 + 4x^2 - 5x + 6$
b) $f(x) = 5x^3 + 7x^2 - 8x + 9$
c) $f(x) = 7x^3 - 4x^2 + 5x - 3$
d) $f(x) = 4x^3 + 5x^2 + 3x - 9$

Si recuerdas, en cálculo diferencial, existe la fórmula que permite calcular la derivada de una suma de funciones y se expresa de la siguiente manera:

$$d(u + v - w) = du + dv - dw$$

Es decir, la derivada de una suma o resta de funciones, es igual a la suma algebraica de las derivadas de cada función, por lo que la fórmula de integración correspondiente será:

$$\int (u + v - w)\, dv = \int u\, du + \int v\, dv - \int w\, dw$$

De igual manera, pueden deducirse otras fórmulas de integración a partir de las fórmulas de derivación o diferenciación estudiadas en el curso de Calculo Diferencial:

1. $\int dx = x + C$

2. $\int kdv = kv + C$

3. $\int (u + v - w)\, dv = \int u\, du + \int v\, dv - \int w\, dw$

4. $\int v^n\, dv = \dfrac{v^{n+1}}{n+1} + C$

5. $\int \dfrac{dv}{v} = \ln v + C$

Con éstas cinco fórmulas practicaremos el cálculo de integrales algebraicas inmediatas y lo haremos a través de los pasos de integración y luego lo aplicaremos a diferentes contextos.

Pasos para integrar una función

1. De la expresión por integrar se toma la variable independiente y se obtiene su derivada (diferencial).
2. Si la diferencial resultante completa exactamente el diferencial de la integral, se aplica directamente la fórmula correspondiente.
3. Si la diferencial resultante completa el diferencial de la integral y sobran constantes, éstas pasan en forma recíproca multiplicando al resultado de la integral.

Ejemplos:

Calcular la integral de las siguientes expresiones:

1. $\int x^3 dx$

Primer paso:

Hacemos $v = x$ y obtenemos su derivada

$\frac{dv}{dx} = 1$

Para obtener el diferencial simplemente se despeja dv, como dx está dividiendo pasa multiplicando, por lo tanto:

$dv = dx$

Segundo paso:

Como $dv = dx$, entonces, completa exactamente el diferencial, puedes observar que en la expresión $\int x^3 dx$ después de la variable x^3 sólo está dx que es igual a dv, por lo tanto, completa el diferencial y aplicamos directamente la fórmula 4, para ello hacemos que $v = x$

$$\int x^3\, dx = \frac{x^{3+1}}{3+1} = \frac{x^4}{4} + C$$

Por lo tanto:

$$\int x^3\, dx = \frac{x^4}{4} + C$$

En forma directa, al exponente de la variable simplemente se le suma 1 y se divide entre el nuevo exponente.

Podemos comprobar si nuestro resultado es correcto, para ello basta con derivar el resultado de la integral y nos debe proporcionar el integrando, como se muestra a continuación:

$$f'(x) = \frac{x^4}{4} + C = \frac{1}{4}x^4 + C = \frac{4}{4}x^{4-1} = x^3$$

Como puedes ver, el resultado de la derivada es igual al integrando de la integral.

2. $\int 5ax^2\, dx$

Apliquemos primero la fórmula número 2, ésta indica que si hay constantes que multipliquen a la variable, pueden salir de la integral y quedan multiplicándola, por ello la expresión anterior, la podemos convertir en:

$$\int 5ax^2\,dx = 5a\int x^2\,dx$$

Puedes observar que la integral a calcular es muy similar a la del ejemplo 1, lo haremos por pasos y luego en forma directa.

$$5a\int x^2\,dx$$

Primer paso:

Hacemos $v = x$ y obtenemos su diferencial

$$\frac{dv}{dx} = 1$$

$$dv = dx$$

Vemos que completa exactamente el diferencial, por lo tanto, pasamos al:

Segundo paso:

Aplicamos directamente la fórmula 4.

$$5a\int x^2\,dx = 5a\frac{x^{2+1}}{2+1} = 5a\frac{x^3}{3} = \frac{5ax^3}{3} + C$$

Por lo tanto:

$$\int 5ax^2\,dx = \frac{5ax^3}{3} + C$$

Una vez que vimos que se completa exactamente el diferencial, podemos integrar de forma directa: aumentando 1 al exponente de la variable y dividiendo la variable entre su nuevo exponente.

$$5a\int x^2\,dx = \frac{5ax^3}{3} + C$$

Comprueba tu resultado a través de la derivada.

3. $\int \sqrt{t}\,dt$

Expresada la integral de esa manera, no se parece a ninguna de las 5 fórmulas, sin embargo, si la raíz cuadrada de t, la expresamos con exponente fraccionario se tiene:

$$\int t^{\frac{1}{2}}\,dt$$

Ahora vemos que se parece a la fórmula 4 y como $v = t$, $dv = dt$, aplicamos directamente dicha fórmula:

$$\int t^{\frac{1}{2}}\ dt = \frac{t^{\frac{1}{2}+1}}{\frac{1}{2}+1} = \frac{t^{\frac{3}{2}}}{\frac{3}{2}} = \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

Por lo tanto:

$$\int \sqrt{t}\ dt = \frac{2t^{\frac{3}{2}}}{3} + C$$

Comprueba tu resultado a través de la derivada.

4. $\int \frac{dx}{x^{2/3}}$

La integral anterior se parece a la fórmula 5, pero el denominador de la fórmula 5 es v y está elevado a la potencia uno, en cambio, el de la integral a calcular la potencia es $\frac{2}{3}$, es decir, la fórmula 5 sólo se aplica cuando el denominador está elevado a la potencia 1. Sin embargo, podemos transformar dicha expresión por una equivalente, para ello pasemos la variable al numerador cambiando el signo del exponente, como se muestra a continuación:

$$\int \frac{dx}{x^{2/3}} = \int x^{-\frac{2}{3}}\ dx$$

Ahora vemos que $dv = dx$ y como se completa exactamente el diferencial, aplicamos la fórmula 4, quedando de la siguiente manera:

$$\int \frac{dx}{x^{2/3}} = \int x^{-2/3}\, dx = \frac{x^{-\frac{2}{3}+1}}{-\frac{2}{3}+1} + C = \frac{x^{\frac{1}{3}}}{\frac{1}{3}} + C = 3x^{\frac{1}{3}} + C$$

Comprueba tu resultado a través de la derivada

5. $\int (x^4 - 3x^{3/2} + \frac{7}{\sqrt{x}} + 5)\ dx$

La expresión anterior cuenta con varios términos, por lo que primero debemos aplicar la fórmula 3, que permite integrar término por término y luego calcular las integrales de cado uno de ellos. Aplicando la fórmula 3 se tiene:

$$\int \left(x^4 - 3x^{3/2} + \frac{7}{\sqrt{x}} + 5\right) dx = \int x^4\, dx - \int 3x^{3/2}\, dx + \int \frac{7}{\sqrt{x}}\, dx + \int 5\, dx$$

Como puedes ver, hay que calcular cuatro integrales por separado y después unir los resultados y esa será la integral planteada. Calculemos cada una de las integrales:

$$\int x^4\, dx = \frac{x^{4+1}}{4+1} = \frac{x^5}{5} + C$$

$$\int 3x^{3/2}\, dx = -\frac{3x^{3/2+1}}{\frac{3}{2}+1} = -\frac{3x^{5/2}}{\frac{5}{2}} = -\frac{6x^{5/2}}{5} + C$$

$$\int \frac{7}{\sqrt{x}}\, dx = \int 7x^{-1/2}\, dx = 7\frac{x^{-1/2+1}}{-\frac{1}{2}+1} = \frac{7x^{1/2}}{\frac{1}{2}} = 14x^{1/2} + C$$

$$\int 5\, dx = 5\int dx = 5x + C$$

Por lo tanto, al unir los resultados de las cuatro integrales se tiene:

$$\int \left(x^4 - 3x^{3/2} + \frac{7}{\sqrt{x}} + 5\right) dx = \frac{x^5}{5} - \frac{6x^{5/2}}{5} + 14x^{1/2} + 5x + C$$

Como puedes observar, aunque cada integral tiene una constante, al final sólo se anota una. Comprueba tu resultado a través de la derivada.

6. $\int \sqrt[3]{x}\, dx$

Si analizas el contenido de la integral, no hay una fórmula directa, pero tienes que hacer uso de tus conocimientos y recordar que una raíz es una potencia fraccionaria:

$$\int \sqrt[3]{x}\, dx = \int x^{\frac{1}{3}}\, dx$$

Ahora usemos la fórmula 4 para integrar una potencia:

$$\int x^{\frac{1}{3}}\, dx = \frac{x^{\frac{4}{3}}}{\frac{4}{3}} + C = \frac{3}{4}x^{\frac{4}{3}} + C$$

7. $\int \frac{2\, dx}{3x} =$

En primer lugar, podemos sacar las constantes de la integral según se indica en la fórmula 2:

$$\int \frac{2\,dx}{3x} = \frac{2}{3}\int \frac{dx}{x}$$

La integral se resuelve, en este caso, aplicando la fórmula 5:

$$\int \frac{dv}{v} = \ln v + C$$

ya que se tiene una expresión racional donde en el denominador la variable tiene exponente 1:

$$\frac{2}{3}\int \frac{dx}{x} = \frac{2}{3}\ln x$$

El resultado se puede comprobar fácilmente sabiendo que la fórmula para derivar un logaritmo natural es exactamente inversa.

$$\frac{d}{dx}(\ln v) = \frac{\frac{d}{dx}v}{v}$$

Una vez que tomes un poco de practica, podrás solucionar los ejercicios de una manera más rápida y directa, omitiendo algunos pasos intermedios como el separar en diferentes integrales o haciendo la conversión entre raíces y potencias. Analiza los siguientes ejemplos:

8. $\int \frac{8}{x^3}\,dx$

$$\int \frac{8}{x^3}\,dx = 8\int x^{-3}\,dx = 8\,\frac{x^{-2}}{-2} + C = -4x^{-2} + C = -\frac{4}{x^2} + C$$

9. $\int (x+2)(x-2)\,dx$

$$\int (x+2)(x-2)\,dx = \int (x^2 - 4\,)\,dx = \frac{x^3}{3} - 4x + C$$

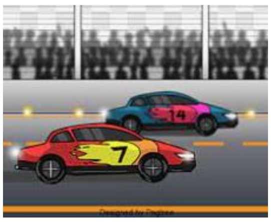
10. $\int (x+5)^2\,dx$

$$\int (x+5)^2\,dx = \int (x^2 + 10x + 25)\,dx = \frac{x^3}{3}10\frac{x^2}{2} + 25x + C = \frac{x^3}{3} + 5x^2 + 25x + C$$

Actividades de Cierre

Una vez que hemos aprendido a calcular las integrales inmediatas algebraicas, lo aplicaremos para resolver problemas reales, al campo de la física y la economía, para ello desarrollaremos el siguiente:

Ejemplo: En una competencia de arrancones, uno de los vehículos es capaz de acelerar $10\frac{m}{s^2}$ en los primeros $8\,segundos$, es decir, por cada segundo que transcurre, la velocidad aumenta $10\frac{m}{s}$. El vehículo, en una competencia debe partir desde el reposo. Con la información anterior, responde correctamente los siguientes incisos:



a) Completa la siguiente tabla que relaciona la aceleración (a), velocidad (v) y distancia (s) con respecto al tiempo.

Tiempo (t)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Aceleración (a)	10	10	10						
Velocidad (v)	0	10	20						
Distancia (s)	0	5	20	45					

b) Determina la función que modela la aceleración (a), velocidad (v) y distancia (s). Para eso toma la primera y la última fila de la tabla anterior, y en la fila de la distancia, obtén la diferencia entre dos valores consecutivos a lo largo de la serie, lo haces una vez y como nos da otra serie numérica, volvemos aplicar diferencias y notaremos que se estabiliza, es decir, se repite el mismo número para todas las series, veamos:

Tiempo (t)	0	1	2	3	4	5	6	7	8
Distancia (s)	0	5	20	45	80	125	180	245	320

5 15 25 35 45 55 65 75

10 10 10 10 10 10 10

Si observas la última serie obtenida, corresponde precisamente a la aceleración, y a partir de ella, lo integramos; primero aplicando la fórmula 2 y luego la fórmula 1, como se muestra a continuación:

$$\int 10\,dt = 10\int dt$$

$$10\int dt = 10t + c_1$$

Observa en los datos de la tabla, $10t$ corresponde precisamente a la velocidad del automóvil, considerando que c_1 es igual a cero porque partió desde el reposo, sin embargo, dejémoslo como c_1 para poder calcularla, y volvamos a integrar este resultado, como se muestra a continuación:

$$\int (10t + c_1)\,dt$$

Como se tienen dos términos, apliquemos primero la fórmula 3, y luego las fórmulas 1 y 4, veamos:

$$\int (10t + c_1)\,dt = \int 10t\ \ dt + \int c_1\,dt$$

Integrando por separado ambas integrales se tienen:

$$\int 10t\,dt = 10\int dt = 10\frac{t^{1+1}}{1+1} = \frac{10t^2}{2} = 5t^2$$

$$\int c_1\,dt = c_1\int dt = c_1 t$$

Por lo tanto:

$$\int (10t + c_1)dt = 5t^2 + c_1 t + c_2$$

$\boldsymbol{c_2}$ se suma al final, puesto que siempre que integres, al final se le debe sumar una constante.

Para calcular los valores de $\boldsymbol{c_1}$ y $\boldsymbol{c_2}$**,** hagamos la distancia igual a la expresión encontrada, y luego sustituimos en ella los datos de la distancia y el tiempo que se tienen en la tabla, lo que permitirá calcular dichas constantes, se sugiere tomar los valores más pequeños, aunque se llega al mismo resultado con cualquiera de los valores.

$$s = 5t^2 + c_1 t + c_2$$

Sustituyendo los valores de $d = 0$ y $t = 0$ se tiene:

$$0 = 5(0)^2 + c_1(0) + c_2$$

$$0 = c_2$$

Ahora sustituyamos $d = 5$ y $t = 1$

$$5 = 5(1)^2 + c_1(1) + 0$$

$$5 = 5 + c_1$$

$$5 - 5 = c_1$$

$$c_1 = 0$$

Sustituyendo los valores de $\boldsymbol{c_1}$ y $\boldsymbol{c_2}$ en la función de distancia, se tiene:

$$s = 5t^2 + c_1 t + c_2$$

$$s = 5t^2 + (0)t + 0$$

$$s = 5t^2$$

Por lo tanto, la distancia recorrida por el automóvil lo modela la siguiente función:

$$s = 5t^2$$

Para determinar la velocidad se sustituye c_1 en la función:

$$V = 10t + c_1$$

Como c_1 es cero se tiene:

$$V = 10t$$

Así que la velocidad lo modela la función siguiente:

$$V = 10t$$

La aceleración simplemente es una función constante:

$$a = 10$$

Si te diste cuenta, al integrar la aceleración:

$$\int 10\, dt = 10t + c_1$$

Obtuvimos la fórmula para calcular la velocidad ($V = 10t$), y al volver a integrar (integramos la velocidad).

$$\int (10t + c_1)\, dt = 5t^2 + c_1 t + c_2$$

Obtuvimos la distancia:

$$d = 5t^2$$

Dado que $\boldsymbol{c_1}$ y $\boldsymbol{c_2}$ son iguales a cero.

Ahora hagamos el proceso inverso, para ello, deriva la función de la distancia:

$$s = 5t^2$$

$$\frac{d(s)}{dt} =$$

¿Qué obtuviste al derivar la distancia? ______________________________________

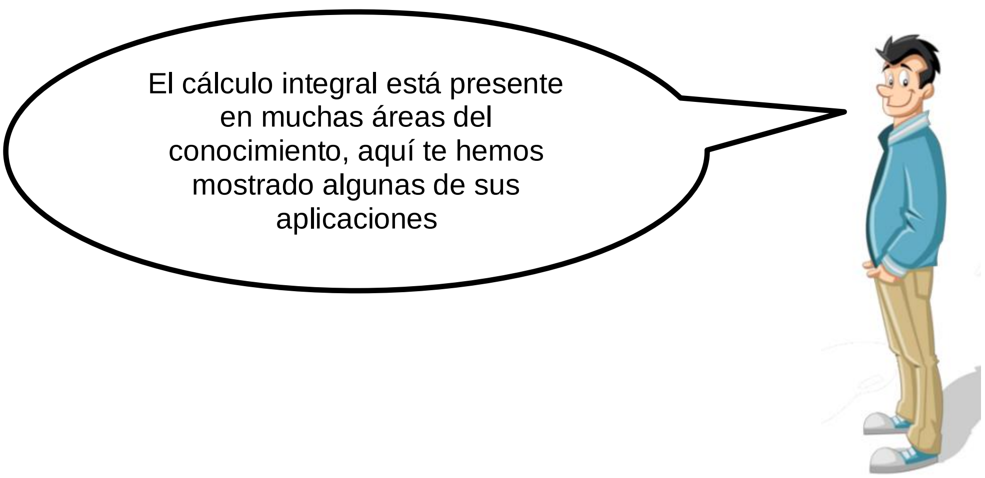
Ahora deriva la velocidad:

$$\frac{d(10t)}{dt} =$$

¿Qué obtuviste como resultado? ____

Como podrás observar, la derivada de la distancia nos da la velocidad, y la derivada de la velocidad nos da la aceleración y a la inversa, la integral de la aceleración nos da la velocidad y la integral de la velocidad nos da la distancia, y ahí está el Teorema Fundamental del Cálculo, que en términos sencillos dice: “La derivada y la integral son operaciones inversas”.

Ese descubrimiento fue lo que le dio la trascendencia que tuvo y tiene, el cálculo integral, ya que no sólo permite calcular el área debajo de una curva, sino determinar la ecuación que lo modela, y dicha ecuación tiene un significado práctico, en este caso, la velocidad del auto de arrancones; si se integra la aceleración y la distancia recorrida por el auto de carreras, si se integra la velocidad.



Actividades de Contextualización o Transversalidad

En forma individual, resuelve el siguiente ejercicio planteado:

Un estudiante de la UNACH, para obtener el grado de Ingeniero Agrónomo, realizó una tesis sobre densidad óptima de población de maíz por hectárea. De acuerdo con sus datos experimentales sus resultados se concentran en la siguiente tabla:

Densidad miles de plantas (x)	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130
Producción en kg (y)	1300	2400	3300	4000	4500	4800	4900	4800	4500	4000	3300	2400	1300

Con la información anterior, determina:

a) La ecuación que modela la producción de maíz en kg (y), en función de la densidad de población (x).

b) Grafica la producción de maíz en kg, en función de la densidad de plantas (x).

c) A través de la derivada, determina la densidad de población que genera la máxima producción.

d) Si el precio del kg de maíz es de $\$4.00$, ¿cuál sería la función del ingreso total? Grafícalo.

e) Si los costos fijos, es decir, aquellos que no cambian, como son la preparación del terreno, fertilizantes, herbicidas, insecticidas, mano de obra, etc. son de $\$8500.00$ y el costo variable corresponde a las semillas, ¿cuál es la función del costo total, si $1000\ semillas$ tienen un costo de $\$25.00$? Grafícalo.

f) Si la ganancia es igual al Ingreso total menos el costo total, ¿cuál es la función que lo modela?, ¿cuántas semillas deberían sembrarse por hectárea para obtener la máxima ganancia? Hazlo a través de la derivada y muéstralo gráficamente.

Ejercicios Adicionales

Determina la integral de las siguientes funciones y compruébalo aplicando el proceso inverso de diferenciación.

a) $\int x^4\,dx =$

b) $\int x^{\frac{2}{3}}\,dx =$

c) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} =$

d) $\int 3ay^2\,dy =$

e) $\int \left(x^{\frac{3}{2}} - 2x^{\frac{2}{3}} + 5\sqrt{x} - 3\right)\,dx =$

f) $\int \sqrt[3]{3t}\,dt =$

g) $\int \frac{4x^2 - 2\sqrt{x}}{x}\,dx =$

h) $\int \left(\frac{x^2}{2} - \frac{2}{x^2}\right)\,dx =$

i) $\int \sqrt{x}(3x - 2)\,dx =$

j) $\int \frac{x^3 - 6x + 5}{x^4}\,dx =$

k) $\int \left(7x^3 + 5x^2 + \frac{9}{x^2} + \frac{2}{a^2}\right)dx =$

l) $\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x}}\,dx =$

2.2. Constante de integración

Introducción

La constante de integración es un valor agregado al cálculo de las antiderivadas o integrales, sirve para representar las soluciones que conforman la primitiva de una función. Expresa una ambigüedad inherente, donde cualquier función cuenta con un número infinito de primitivas.

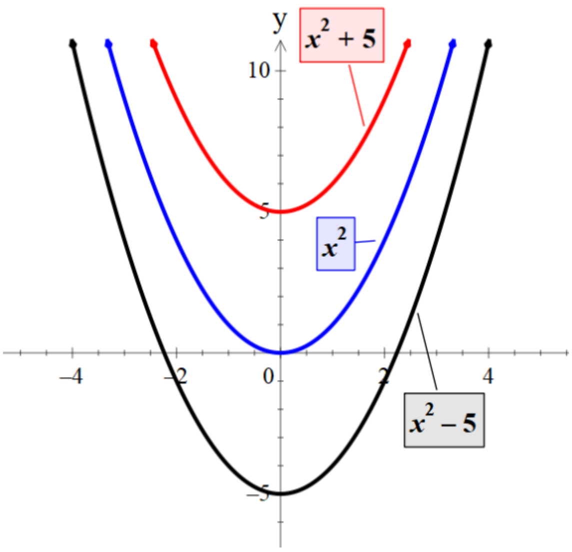
Significado geométrico de la constante de integración.

Cuando se integra una diferencial dada, lo que realmente se está obteniendo es una familia de funciones de la forma $\boldsymbol{f(x)+C}$, donde C se denomina *constante de integración* y es *arbitraria,* ya que se le puede asignar cualquier valor real.

Como $d(x^2+5)=2x\,dx$,	entonces:	$\int 2x\,dx = x^2+5$
Como $d(x^2)=2x\,dx$,	entonces:	$\int 2x\,dx = x^2$
Como $d(x^2-5)=2x\,dx$,	entonces:	$\int 2x\,dx = x^2-5$

De manera general:

Como $d(x^2+C)=2x\,dx$,	entonces:	$\int 2x\,dx = x^2+C$



En general, como:

$$\boldsymbol{d[f(x)+C]=f'(x)\,dx}$$

Donde $\boldsymbol{C}$ es la constante arbitraría, tenemos que:

$$\boldsymbol{\int f'(x)\,dx = f(x)+C}$$

Es decir, la integral indefinida y C constante de integración.

2.2.1. Cálculo de la constante de integración.

Actividades de Apertura

Tomemos como referencia el caso explicado anteriormente. Si calculamos $\int \mathbf{2x\,dx}$, ¿cómo saber específicamente a cuál de las tres parábolas corresponde el resultado?

Para eso necesitamos más datos iniciales. Por ejemplo, se sabe que la parábola que buscamos tiene un valor de la función igual a 5 cuando $x = 0$

¿Cuál de las tres parábolas tiene esta característica en la figura anterior? __________.

Analíticamente, procedemos registrando, en primer lugar, el resultado en su forma genérica:

$$\int 2x\,dx = x^2 + C$$

Significa que la función que estamos buscando es de la forma:

$$f(x) = x^2 + C$$

¿Cuál es el valor de C?

Como la función tiene un valor de $f(x) = 5$ cuando $x = 0$, sustituimos esta condición en el resultado:

$$f(x) = x^2 + C$$
$$5 = (0)^2 + C$$

Despejamos C:

$$C = 5$$

Por lo que, la función que cumple con esta condición tiene de ecuación:

$$f(x) = x^2 + C$$

$$\therefore \quad f(x) = x^2 + 5$$

Actividades de Desarrollo

Ahora pongamos en práctica el procedimiento anterior.

Ejemplo: Determina la función cuya derivada es $\boldsymbol{f'(x) = 3x^2}$ y tiene un valor de $\mathbf{3}$ cuando $\boldsymbol{x = 1}$.

En primer lugar, calcula la operación inversa de diferenciación:

$$\int 3x^2\, dx = 3\frac{x^3}{3} + C = x^3 + C$$

La función que buscamos es de la forma:

$$f(x) = x^3 + C$$

Como la función tiene un valor de $f(x) = 3$ cuando $x = 1$, sustituimos esta condición en el resultado:

$$f(x) = x^3 + C$$
$$3 = (1)^2 + C$$

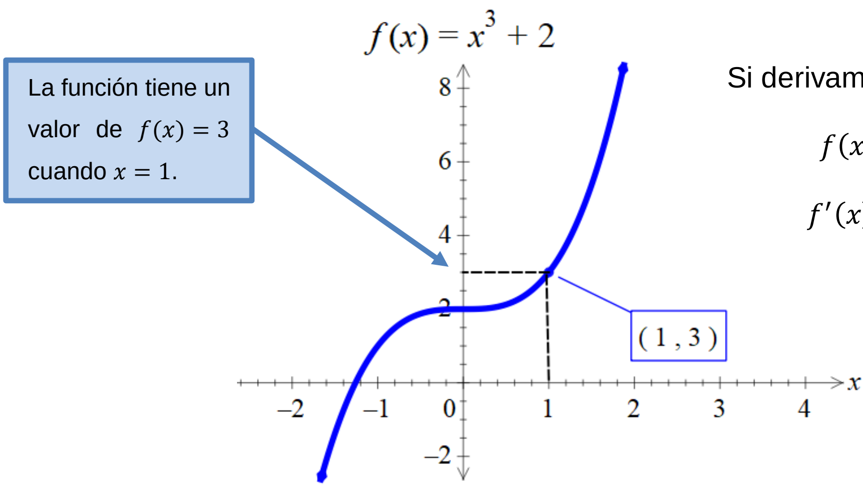
Despejamos C:

$$C = 2$$

Por lo que, la función que cumple con esta condición tiene de ecuación:

$$f(x) = x^3 + C$$
$$\therefore \quad f(x) = x^3 + 2$$

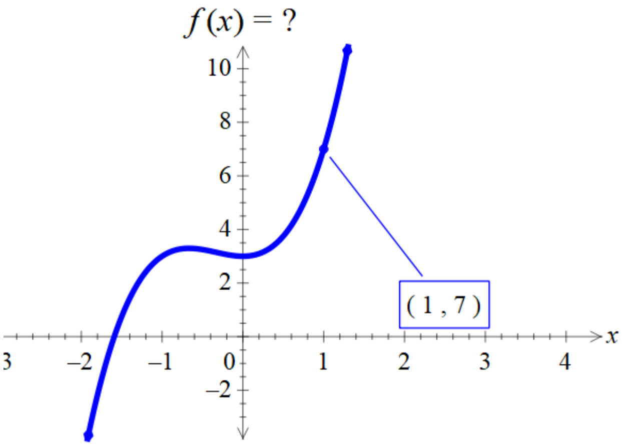
Una forma de comprobar el resultado es analizar el gráfico de la función obtenida:



Si derivamos la función:

$$f(x) = x^3$$
$$f'(x) = 3x^2$$

Tu turno: Determina la función cuya derivada es $f'(x) = 3x^2 + 4x$, tiene un valor de 7 cuando $x = 1$. (Observa la gráfica).



En primer lugar, calcula la operación inversa de diferenciación:

$$\int (3x^2 + 4x)dx = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} + C$$

Escribe la forma genérica de la función:

$$f(x) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} + C$$

Sustituye el valor de la función $f(x) = 7$ cuando $x = 1$, en la función anterior:

$$f(x) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} + C$$

$$\underline{\qquad\quad} = \underline{\qquad\qquad\quad} + C$$

Despeja C:

$$C = \underline{\qquad}$$

Sustituye C en la forma genérica de la función:

$$f(x) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad} + C$$

$$\therefore f(x) = \underline{\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad}$$

Actividades de Cierre

Bien, ahora ya sabes cómo usar y aplicar las fórmulas, completa el procedimiento para determinar el valor de la constante C y la función solicitada.

1. Determina una función $y = f(x)$, cuya primera derivada sea $f'(x) = 3x^2 - 2x + 5$ y tenga valor $y = 12$ cuando $x = 1$.

Solución:

$$\int (3x^2 - 2x + 5)\, dx = 3\int x^2\, dx - 2\int x\, dx + 5\int dx = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ + C$$

Dado que $y = 12$ cuando $x = 1$:

Sustituimos: $12 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ + C$

$12 = \_\_\_\_\_\_\_\_ + C$

$\boldsymbol{C} = \_\_\_\_$

De acuerdo con lo anterior, la función que buscamos es:

$\boldsymbol{y} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

2. Determina la función $f(x)$ sí sabemos que $f'(x) = x^3 - 4x$ y $f(0) = 12$.

Solución:

$$\int (x^3 - 4x)\, dx = \int x^3\, dx - 4\int x\ dx = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ + C$$

Dado que $f(0) = 12$

Sustituimos: $12 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ + C$

$12 = \_\_\_\_\_\_\_\_ + C$

$\boldsymbol{C} = \_\_\_\_$

Por lo tanto, la función que buscamos es:

$\boldsymbol{y} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

3. Encuentra la función $f(x)$ a partir d $f'(x) = 2x + 1$ y $f(2) = 4$

Solución:

$$\int (2x + 1)\, dx = 2\int x\ dx + 1\int dx = \_\_\_\_\_\_\_\_ + C$$

Sustituimos $f(2) = 4$, $4 = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_ + C$

$4 = \_\_\_\_\_\_\_\_ + C$

$\boldsymbol{C} = \_\_\_\_\_$

La función buscada es $\boldsymbol{y} = \_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_\_$

Ahora pasemos a ver su contextualización, es decir, problemas de la vida real en la que podemos aplicar integrales y debemos estimar la contante C.

Actividades de Contextualización o Transversalidad

Resuelve los siguientes problemas de contexto:

1. Una población es atacada por una epidemia de gripe sea $N(t)$; el número de personas enfermas al tiempo t en días, la epidemia inició en $N(0) = 50$. Un matemático determina que la gripe se extiende a razón de $f'(t) = 120t - 3t^2$ personas por día.

Determina:

a) La función original que describe el comportamiento de la epidemia. (Aplica los mismos pasos explicados anteriormente).

b) ¿Cuántos enfermos habrá después de $15\ días$ si no se controla la epidemia?

2. El costo marginal de una compañía está dado por la expresión $c'(x) = 1.2 + 0.004\ x$ dólares por unidad, al producir x unidades mensuales. Si los costos fijos son de $900\ dólares$, determina:

a) La ecuación del costo total.

a) El costo promedio de $500\ unidades$.

Ejercicios Adicionales

1. Un fabricante de joyas determina que el ingreso marginal $I'(x)$ en dólares, asociado con su producción y venta de x joyas es: $I'(x) = 85 - x$.

a) Encuentra el ingreso total por la venta de x joyas.

b) ¿Cuál es el ingreso total para su producción de 30 artículos si $I(0) = 0$?

2. La función del costo marginal de una empresa, cuando produce x unidades diarias, es de $\boldsymbol{C'(x) = 10 + 0.1\,x}$.

a) Si sus costos fijos son de $\$8{,}000$ diarios, encuentra la ecuación de los costos marginales.

b) El costo de producir $200\ unidades$ diarias.

3. Se lanza un proyectil verticalmente desde lo alto de un edificio de $60\ pies$ de altura ($s(0) = 60m$), con una velocidad inicial de $96\ pies/s$, $v(0) = 96\ m/s$. Si la aceleración del proyectil en cualquier instante t es de $-32\ pies/s^2$, determina:

a) La ecuación de la función de la velocidad.

b) La velocidad a los $2\ segundos$.

c) La ecuación de la función de posición $S(t)$ de la partícula.

d) La altura a la que se encuentra el proyectil sobre la superficie terrestre a los $5\ segundos$.

4. Encuentra la función $f(x)$ a partir de $f'(x) = 6x^2 + 8$ y $f(0) = 35$
5. Encuentra la función $f(x)$ a partir de $f'(x) = 2x^2 + 1$ y $f(0) = 1$
6. Encuentra la función $f(x)$ a partir de $f'(x) = \cos x$ y $f(0) = 3$
7. Encuentra la función $f(x)$ a partir de $f'(x) = 6x^2 - 2x + 1$ y $f(2) = 1$
8. Encuentra la función $f(x)$ a partir de $f'(x) = 7x^3 + 3x^2 + 1$ y $f(2) = 97$

2.3 Fórmulas para integrales inmediatas elementales.

Introducción

Existen fórmulas que te permitirán realizar las operaciones de integración de manera

directa, pues están diseñadas para los casos de integración que se presentan de manera más común o frecuente. Cuando nos encontramos con una expresión diferencial que coincide con la estructura de una de esas fórmulas, nos referimos a ellas como Integrales Inmediatas. En algunos casos, solo tendremos que verificar si se cumplen las condiciones necesarias para su ejecución.

Actividades de Apertura

Retomemos las primeras fórmulas de integrales algebraicas inmediatas.

1. $\int (du + dv + dw) = \int du + \int dv + \int dw$

2. $\int a\, dv = a \int dv$

3. $\int dx = x + C$

4. $\int v^n\, dv = \dfrac{v^{n+1}}{n+1} + C$

5. $\int \dfrac{dv}{v} = \ln v + C$

Para comprobar los resultados en el proceso de integración, en estos casos, te serán útiles las siguientes fórmulas de diferenciación:

$$d(v^n) = nv^{n-1}\, dv$$

$$d(\ln v) = \frac{dv}{v}$$

Antes de aplicar cada fórmula, es necesario analizar su estructura, por ejemplo:

$$\int v^n\, dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C$$

Nos indica que, cuando se integre una potencia, es necesario verificar si la diferencial está completa. $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{dv}$ deben corresponderse en primera instancia. La segunda, debe calcularse a partir de la primera:

$$\int x^2\, dx$$

$$v = x \therefore dv = dx$$

$$\int x^2\,dx = \frac{x^{2+1}}{2+1} + C = \boxed{\frac{x^3}{3} + C}$$

El proceso de completar la diferencial te lo explicamos con los siguientes ejemplos:

Ejemplo 1: Calcula la siguiente integral:

$$\int (x^2+1)^3\,x\,dx$$

$$\boxed{\int v^n\,dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C}$$

Se trata de una potencia, por lo que verificaremos si se cumplen las condiciones de la fórmula correspondiente.

Identifica los elementos de la fórmula: v, n y dv

$$\int (x^2+1)^3\,x\,dx$$

$$v = x^2 + 1$$

$$n = 3$$

$$dv = 2x\,dx$$

Observa que, en este caso, la diferencial no está completa, pues v y dv no se corresponden del todo. El coeficiente 2 es necesario para completar la diferencial.

Para completar la diferencial es necesario multiplicar por 2, lo que implica duplicar la expresión que teníamos originalmente. Para compensar este cambio, necesitamos dividir el resultado de la integral por 2. Observa:

3 Se compensan los cambios aplicando la operación inversa que se empleó al completar.

$$\frac{1}{2}\int (x^2+1)^3\,2x\,dx \quad ✓$$

$$v = x^2 + 1$$

$$n = 3$$

$$dv = 2x\,dx$$

1 Se calcula la diferencial de v.

2 Si la diferencia es un factor contante, (2 en este caso), se multiplica para completar.

Una vez, que hemos completado la diferencial, procedemos a aplicar la fórmula de integración correspondiente:

$$\int v^n\,dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\frac{1}{2}\int (x^2+1)^3\,2x\,dx = \frac{1}{2}\frac{(x^2+1)^{3+1}}{3+1} + C = \boxed{\frac{1}{8}(x^2+1)^4 + C}$$

Para comprobar que el resultado es correcto, aplicamos la operación inversa de la integración al resultado. Aquí empleas los conocimientos previos de Cálculo Diferencial:

$$d(v^n) = nv^{n-1}dv$$

$$d\left[\frac{1}{8}(x^2+1)^4 + c\right] = \frac{1}{8}(4)(x^2+1)^{4-1}d(x^2+1)$$

$$= \frac{4}{8}(x^2+1)^{4-1}(2xdx) = \frac{1}{\cancel{2}}(x^2+1)^3(\cancel{2}xdx)$$

$$= \boxed{(x^2+1)^3x\,dx}$$

Se obtiene la expresión diferencial que se planteó originalmente.

Ejemplo 2: Calcula la siguiente integral:

$$\int \sqrt[3]{(ax^3+b)^2}\,x^2dx = \int (ax^3+b)^{2/3}\,x^2dx$$

$$\boxed{\int v^n\,dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C}$$

Nuevamente se trata de una potencia por lo que en primer lugar hacemos la conversión

Identifica los elementos de la fórmula: **v**, **n** y **dv**

$$\int (ax^3+b)^{2/3}\,x^2dx$$

$$v = ax^3 + b$$

$$n = {}^{2}/_{3}$$

$$dv = 3ax^2\,dx$$

Nota que nuevamente, la diferencial no está completa, pues $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{dv}$ no se corresponden del todo. El coeficiente $\boldsymbol{3a}$ es necesario para completar la diferencial.

Para completar la diferencial es necesario multiplicar por $\boldsymbol{3a}$, lo que modifica la expresión original. Para compensar éste cambio, necesitamos dividir el resultado de la integral por $\mathbf{3a}$. Observa:

3

Se compensan los cambios aplicando la operación inversa que se empleó al completar.

$$\frac{1}{3a}\int (ax^3+b)^{2/3}\, 3ax^2dx$$

2

Si la diferencia es un factor contante, ($3a$ en este caso), se multiplica para completar.

1

Se calcula la diferencial de $\boldsymbol{v}$.

$$v = ax^3 + b$$

$$n = {}^2/_3$$

$$dv = 3ax^2dx$$

Una vez, que hemos completado la diferencial procedemos a aplicar la fórmula de integración correspondiente:

$$\int v^n\, dv = \frac{v^{n+1}}{n+1} + C$$

$$\frac{1}{3a}\int (ax^3+b)^{2/3}\; 3ax^2\, dx = \frac{1}{3a}\,\frac{(ax^3+b)^{\frac{2}{3}+1}}{\frac{2}{3}+1} + C$$

$$= \frac{1}{3a}\,\frac{(ax^3+b)^{5/3}}{\frac{5}{3}} + C = \frac{3}{15a}(ax^3+b)^{5/3} + C = \boxed{\frac{1}{5a}(ax^3+b)^{5/3} + C}$$

Para asegurarnos que el resultado es correcto, nuevamente aplicamos la operación inversa de la integración al resultado.

$$d(v^n) = nv^{n-1}\, dv$$

$$d\left[\frac{1}{5a}(ax^3+b)^{5/3} + C\right] = \frac{1}{5a}\left(\frac{5}{3}\right)(ax^3+b)^{\frac{5}{3}-1}\, d(ax^3+b)$$

$$= \frac{\cancel{5}}{\cancel{15}a}(ax^3+b)^{\frac{2}{3}}\,(3\cancel{a}x^2dx) = \frac{15}{15}(ax^3+b)^{\frac{2}{3}}\,(x^2dx)$$

$$= (ax^3+b)^{\frac{2}{3}}\, x^2\, dx = \boxed{\sqrt[3]{(ax^3+b)^2}\;\, x^2dx}$$

Se obtiene la expresión diferencial que se planteó originalmente.

Ejemplo 3: Calcula la siguiente integral

$$\int \frac{y\,dy}{1-y^2} =$$

$$\boxed{\int \frac{dv}{v} = \ln v + C}$$

En este caso tenemos una expresión racional en la que es posible una correspondencia entre su numerador y denominador.

Identifica los elementos de la fórmula: $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{dv}$

$$\int \frac{y\,dy}{1-y^2}$$

$$v = 1 - y^2$$

$$dv = -2y\,dy$$

De la misma manera que en los casos anteriores, la diferencial no está completa, pues $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{dv}$ no se corresponden del todo. El coeficiente $-\mathbf{2}$ es necesario para completar la diferencial. Para completar la diferencial es necesario multiplicar por $-\mathbf{2}$ el numerador de la fracción, lo que modifica la expresión, y para compensar este cambio, necesitamos dividir el resultado de la integral por $-\mathbf{2}$. Observa:

3

Se compensan los cambios, aplicando la operación inversa que se empleó al completar.

$$\frac{1}{-2}\int \frac{-2y\,dy}{1-y^2}$$

✓

2

Si la diferencia es un factor contante (-2 en este caso) se multiplica para completar.

$$v = 1 - y^2$$

$$dv = -2y\,dy$$

1

Se calcula la diferencial de $\boldsymbol{v}$.

Una vez que hemos completado la diferencial, procedemos a aplicar la fórmula de integración correspondiente:

$$\boxed{\int \frac{dv}{v} = \ln v + C}$$

$$= \frac{1}{-2}\int \frac{-2y\,dy}{1-y^2} = \boxed{\frac{1}{-2}\ln(1-y^2) + \mathrm{C}}$$

Para asegurarnos que el resultado es correcto, nuevamente aplicamos la operación inversa de la integración al resultado.

$$d(\ln v) = \frac{dv}{v}$$

$$d\left[\frac{1}{-2}\ln(1-y^2) + \mathrm{C}\right] = \frac{1}{-2}\frac{\mathrm{d}(1-y^2)}{(1-y^2)} + \mathrm{C} = \frac{1}{-2}\frac{-2y\,dy}{(1-y^2)} + \mathrm{C} = \boxed{\frac{y\,dy}{(1-y^2)} + \mathrm{C}}$$

Actividades de Desarrollo

En los siguientes casos, calcula la diferencial dv e indica qué operación debe realizarse para completar la diferencial de cada integral:

Integral	Relación v y dv	Integral completa
$\int (2x^4+6)^{4/3}\, x^3\, dx$	$v =$ $n =$ $dv =$	$[\quad]\int (2x^4+6)^{4/3}\,[\quad]x^3\, dx$
$\int \left(\frac{y^5}{b}+a\right)^{7/8} y^4\, dy$	$v =$ $n =$ $dv =$	$[\quad]\int \left(\frac{y^5}{b}+a\right)^{7/8} [\quad]\, y^4\, dy$
$\int \sqrt[4]{(3r^4+1)^3}\, r^3\, dr$	$v =$ $n =$ $dv =$	$[\quad]\int \sqrt[4]{(3r^4+1)^3}\,[\quad]r^3\, dr$
$\int \sqrt[5]{(2-aw^2)^3}\, w\, dw$	$v =$ $n =$ $dv =$	$[\quad]\int \sqrt[5]{(2-aw^2)^3}\,[\quad]w\, dw$
$\int \frac{t^2\, dt}{at^3-b} =$	$v =$ $n =$ $dv =$	$[\quad]\int \frac{[\quad]t^2\, dt}{at^3-b} =$
$\int \frac{w^4\, dw}{1+aw^5} =$	$v =$ $n =$ $dv =$	$[\quad]\int \frac{[\quad]w^4\, dw}{1+aw^5} =$

Actividades de Cierre

Toma como referencia tus registros de la tabla anterior, y resuelve las siguientes integrales:

a) $\int (2x^4+6)^{4/3}\, x^3\, dx =$

b) $\int \sqrt[4]{(3r^4+1)^3}\, r^3\, dr =$

c) $\int \frac{w^4\, dw}{1+aw^5} =$

Ejercicios Adicionales

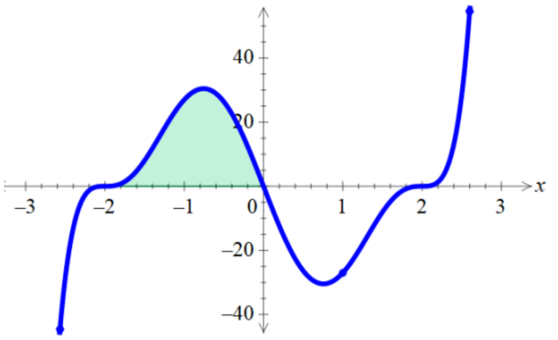
1. Desarrolla las siguientes integrales indefinidas, aplicando las fórmulas de integrales inmediatas elementales, y comprobar por diferenciación.

a) $\int \left(\frac{y^5}{b} + a\right)^{7/8} y^4\, dy$

b) $\int \sqrt[5]{(2 - aw^2)^3}\, w\, dw$

2. Determina el área bajo la curva de la siguiente figura:

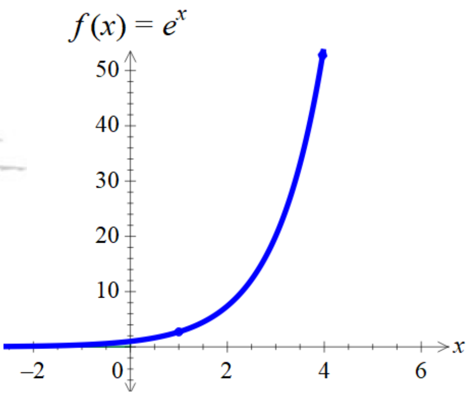
$$f(x) = (x^2 - 4)^3\, x$$

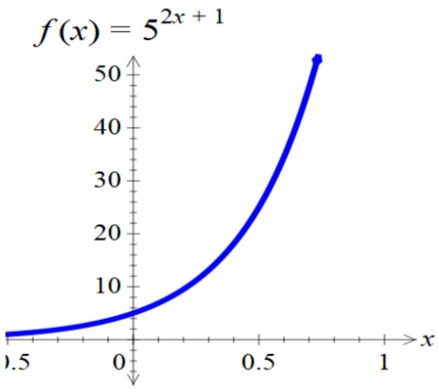


2.4. Aplicación de fórmulas de integración inmediatas para diferenciales exponenciales.

Introducción

Las ecuaciones exponenciales son aquellas en las que la variable independiente aparece en el exponente. Desde el punto de vista de la matemática, de un hecho o fenómeno del mundo real, las ecuaciones exponenciales se usan desde el tamaño de la población hasta fenómenos físicos como la aceleración, velocidad y densidad.





Actividades de Apertura

Para integrar las diferenciales exponenciales, se emplean las fórmulas inmediatas:

$$6. \int a^v \, dv = \frac{a^v}{\ln a} + C$$

$$7. \int e^v \, dv = e^v + C$$

La forma a^v se emplea para cualquier valor de a (a es una constante). La forma e^v es un caso especial, cuando la base toma el valor del número de Euler e.

Al igual que en el caso de las fórmulas anteriores, antes de aplicar cada fórmula es necesario analizar su estructura, por ejemplo:

$$\int a^v \, dv = \frac{a^v}{\ln a} + C$$

Nos indica que cuando se integre una potencia exponencial, es necesario verificar si la diferencial está completa. v y dv deben corresponderse en primera instancia. La segunda debe calcularse a partir de la primera:

$$\int 5^x \, dx$$

$$v = x \therefore dv = dx$$

$$\int a^v \, dv = \frac{a^v}{\ln a} + C \longrightarrow \int 5^x \, dx = \frac{5^x}{\ln 5} + C$$

El proceso de completar la diferencial te lo explicamos con los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1: Calcula la siguiente integral:

$$\int 10^{3x} \; dx$$

$$\boxed{\int a^v \, dv = \frac{a^v}{\ln a} + C}$$

Se trata de expresión exponencial, por lo que verificaremos si se cumplen las condiciones de la fórmula correspondiente.

Identifica los elementos de la fórmula: $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{dv}$

$$\int 10^{3x} \, dx$$

$$v = 3x$$

$$dv = 3\,dx$$

Observa que en este caso, la diferencial no está completa, pues v y dv no se corresponden del todo. El coeficiente 3 es necesario para completar la diferencial.

Para completar la diferencial es necesario multiplicar por 3, lo que implica triplicar la expresión que teníamos originalmente. Para compensar este cambio, necesitamos dividir el resultado de la integral por 3. Observa:

3

Se compensan los cambios, aplicando la operación inversa que se empleó al completar.

$$\frac{1}{3}\int 10^{3x} \, 3dx$$

2

Si la diferencia es un factor contante, (3 en este caso), se multiplica para completar.

1

Se calcula la diferencial de $\boldsymbol{v}$.

$$v = 3x$$

$$dv = 3\,dx$$

Una vez, que hemos completado la diferencial, procedemos a aplicar la fórmula de integración correspondiente:

$$\int a^v \, dv = \frac{a^v}{\ln a} + C$$

$$\frac{1}{3}\int 10^{3x} \quad 3x\, dx = \boxed{\frac{1}{3}\frac{10^{3x}}{\ln 10} + C}$$

Para comprobar que el resultado es correcto, aplicamos la operación inversa de la integración al resultado. Aquí empleas los conocimientos previos de Cálculo Diferencial:

$$d(a^v) = a^v \ln a \;\, dv$$

$$d\left[\frac{1}{3}\frac{10^{3x}}{\ln 10} + C\right] = \frac{1}{3\cancel{\ln 10}} 10^{3x} \cancel{\ln 10}\, d(3x)$$

$$= \frac{1}{\cancel{3}} 10^{3x} \cancel{3} dx$$

$$= \boxed{10^{3x} dx}$$

Se obtiene la expresión diferencial que se planteó originalmente.

Ejemplo 2:

$$\boxed{\int e^{2x^3}\, 5x^2 dx} \qquad \boxed{\int e^v \, dv = e^v + C}$$

Se trata de expresión exponencial en cuya base se tiene al número e. Eso sugiere la aplicación de la fórmula 7 y que verificaremos si se cumple la relación entre v y dv

Identifica los elementos de la fórmula: $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{dv}$

$$\int e^{2x^3} 5x^2 dx \quad dx$$

$$v = 2x^3$$

$$dv = 6x^2 dx$$

Observa que en este caso la diferencial no está completa, pues $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{dv}$ no se corresponden. El coeficiente 6 es necesario para completar la diferencial, pero en la diferencial original aparece un coeficiente 5. La fórmula 2 nos permite sacarlo y completamos con el 6 faltante. Para completar la diferencial es necesario multiplicar por 6, lo que nos obliga a compensar dividiendo la integral por el mismo valor. Observa:

3 Se compensan los cambios aplicando la operación inversa que se empleó al completar.

$$\frac{5}{6}\int e^{2x^3}\,6x^2dx$$

2 Se completa la diferencial con 6 y se saca el 5 de la integral

$$v = 2x^3$$

$$dv = 6x^2dx$$

1 Se calcula la diferencial de $\boldsymbol{v}$.

Una vez, que hemos completado la diferencial, procedemos a aplicar la fórmula de integración correspondiente:

$$\int e^v\,dv = e^v + C$$

$$\frac{5}{6}\int e^{2x^3}\,6x^2dx = \boxed{\frac{5}{6}e^{2x^3} + \mathrm{C}}$$

Comprobación por diferenciación:

$$d(e^v) = e^v\,dv$$

$$d\left[\frac{5}{6}e^{2x^3} + \mathrm{C}\right] = \frac{5}{6}e^{2x^3}d(2x^3) = \frac{5}{\cancel{6}}e^{2x^3}\cancel{6}x^2\,dx$$

$$\boxed{= e^{2x^3}5x^2\,dx}$$

Actividades de Desarrollo

En los siguientes casos, calcula la diferencial dv e indica qué operación debe realizarse para completar la diferencial de cada integral:

Integral	Relación v y dv	Integral completa
$\int 2^{5t^2}\, t\, dt$	$v =$ $dv =$	$[\quad]\int 2^{5t^2}[\quad]t\, dt$
$\int 8^{\frac{3x}{2}}\, dx$	$v =$ $dv =$	$[\quad]\int 8^{\frac{3x}{2}}[\quad]\, dx$
$\int e^{-xr^2}\, 3r\, dr$	$v =$ $dv =$	$[\quad]\int e^{-r^2}\, 3r\, dr$
$\int 7e^{\pi y^4}\, y^3\, dy$	$v =$ $dv =$	$[\quad]\int e^{\pi y^4}[\quad]y^3\, dy$
$\int \frac{5x^2\, dx}{e^{2x^3}}$	$v =$ $dv =$	$[\quad]\int e^{-2x^3}[\quad]x^2\, dx$

Actividades de Cierre

1. Toma como referencia tus registros en la tabla anterior y resuelve las siguientes integrales:

a) $\int 2^{5t^2}\, t\, dt =$

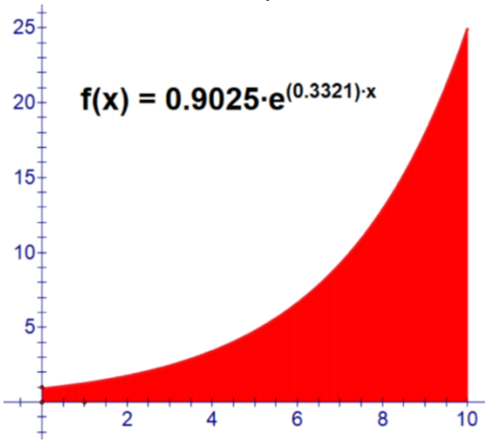
b) $\int e^{-xr^2}\, 3r\, dr =$

c) $\int \frac{5x^2\, dx}{e^{2x^3}} =$

Actividades de Contextualización o Transversalidad

Retomemos el ejercicio que realizaste en la página 21. Ahora puedes resolverlo de una manera más rápida y sencilla:

1. En los primeros días de la pandemia en México, en el mes de marzo, científicos epidemiólogos expertos en el área estimaron que la curva de contagios para el país seguiría el comportamiento del siguiente gráfico (izquierda) donde x es el número de días transcurridos a partir del brote. El área bajo la curva representa el número acumulado de casos positivos en el rango de diez días.



a) Determina: ¿cuántos casos positivos surgieron durante esos 10 primeros días de contagio?

b) Si el gráfico se extiende a tres días más, ¿cuántos casos acumulados habrá en esos tres días?

c) ¿Cómo se comparan el número de casos en ésos últimos tres días con los 10 días previos?

d) Si extrapolamos el gráfico hasta los 30 días, ¿cuántos casos acumulados habrá en los días 28, 29 y 30?

e) Ante el pronóstico de propagación del Covid 19, el gobierno federal anunció una serie de medidas para contener la velocidad de contagio. Se estima que, de respetarse estas medidas, el grafico puede comportarse como la función $f(x) = 0.8913e^{0.3112x}$. ¿Cuántos casos de contagio podrían evitarse en esta situación, solo en los últimos 3 días (98,99 y 100) siguiendo las recomendaciones?

f) ¿Cuántos casos de contagio podrían evitarse en esta situación solo en los últimos 3 días (28, 29 y 30) siguiendo las recomendaciones?

Ejercicios Adicionales

1. Aplica el procedimiento de resolución de las integrales estudiadas en esta unidad para resolver los siguientes ejercicios. Comprueba los resultados por diferenciación.

a) $\int 2e^{3x}\,dx =$

b) $\int 2e^{x^2}x\,dx =$

c) $\int \frac{3}{e^{2x}}\,dx =$

d) $\int (e^{2x})^2\,dx =$

e) $\int e^{(5x+3)}\,dx =$

g) $\int 5^{2x}\,dx =$

h) $\int 7^{x}\,dx =$

2.5 Integración de diferenciales trigonométricas directas.

Introducción

Las diferenciales trigonométricas son aquellas que contienen una, o más de una, función

trigonométrica: seno, coseno, tangente, cotangente, secante y cosecante. Se encuentran notables aplicaciones de las funciones trigonométricas en la física y en casi todas las ramas de la ingeniería, sobre todo en el estudio de fenómenos periódicos y como se propagan las ondas: las ondas que se producen al tirar una piedra en el agua, o al agitar una cuerda cogida por los dos extremos, o las ondas electromagnéticas de la luz, el microondas o los rayos-x, las ondas sonoras, entre otros.

Las primeras aplicaciones de la trigonometría se hicieron en los campos de la navegación, la geodesia y la astronomía, en los que el principal problema era determinar una distancia inaccesible, es decir, una distancia que no podía ser medida de forma directa, como la distancia entre la Tierra y la Luna.

Actividades de Apertura

Para integrar las diferenciales trigonométricas se emplean las fórmulas inmediatas:

8. $\int Sen\, v\, dv = -Cos\, v + C$

9. $\int Cos\, v\, dv = Sen\, v + C$

10. $\int Sec^2\, v\, dv = Tg\, v + C$

11. $\int Csc^2\, v\, dv = -Ctg\, v + C$

12. $\int Sec\, v\, Tg\, v\, dv = Sec\, v + C$

13. $\int Csc\, v\, Ctg\, v\, dv = -Csc\, v + C$

14. $\int Tg\, v\, dv = -\ln(Cos\, v) + c = \ln(Sec\, v) + C$

15. $\int Ctg\, v\, dv = ln\,(Sen\, v) + c = -ln\,(Csc\, v) + C$

16. $\int Sec\, v\, dv = ln\,(Sec\, v + Tg\, v) + C$

17. $\int Csc\, v\, dv = ln\,(Csc\, v - Ctg\, v) + C$

Las resoluciones de integrales inmediatas para diferenciales trigonométricas, también resultan ser muy sencillas, ya que se aplican los mismos criterios que has estudiado anteriormente para relacionar el argumento v con su diferencial correspondiente dv. En este caso, v es siempre el ángulo de la función.

Para los casos en que sea necesario comprobar los resultados por diferenciación, tendrás que aplicar alguna de las fórmulas estudiadas en el curso de Cálculo diferencial:

$$d(Sen\,v) = Cos\,v\,dv$$

$$d(Cos\,v) = -Sen\,v\,dv$$

$$d(Tg\,v) = Sec^2\,v\,dv$$

$$d(Ctg\,v) = -Csc^2\,v\,dv$$

$$d(Sec\,v) = Sec\,v\,\,Tg\,v\,dv$$

$$d(Csc\,v) = -Csc\,v\,Ctg\,v\,dv$$

Puede ser necesario convertir una expresión que sea imposible integrar en primera instancia por otra equivalente, aplicando identidades trigonométricas básicas, que estudiaste en los cursos de Geometría y Trigonometría y Calculo Diferencial:

1. $Sen\,v = \dfrac{1}{Csc\,v}$
2. $Cos\,v = \dfrac{1}{Sec\,v}$
3. $Tg\,v = \dfrac{1}{Ctg\,v}$
4. $Ctg\,v = \dfrac{1}{Tg\,v}$
5. $Sec\,v = \dfrac{1}{Cos\,v}$
6. $Csc\,v = \dfrac{1}{Sen\,v}$
7. $Tg\,v = \dfrac{Sen\,v}{Cos\,v}$
8. $Ctg\,v = \dfrac{Cos\,v}{Sen\,v}$
9. $Sen^2\,v + Cos^2\,v = 1$
10. $Tg^2\,v + 1 = Sec^2\,v$
11. $Ctg^2\,v + 1 = Csc^2\,v$

Analiza los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1: Resuelve la integral:

$$\int Sen\,4t\,dt =$$

Evidentemente se trata de un caso particular de la fórmula de integración número 8:

$$\int Sen\,v\,dv = -Cos\,v + c$$

En primer lugar, verifiquemos si la diferencial está completa:

$$\int Sen\,4t\,dt =$$

$$v = 4t \therefore dv = 4\,dt$$

Observa que en este caso, la diferencial no está completa, pues v y dv no se corresponden. El coeficiente 4 es necesario para completar la diferencial.

Para completar la diferencial es necesario multiplicar por 4, como has procedido anteriormente: multipliquemos por 4 y compensemos ese cambio con la operación inversa fuera de la integral:

3 Se compensan los cambios aplicando la operación inversa que se empleó al completar.

$$\frac{1}{4}\int Sen\,4t\;4dt$$

2 Completamos la integral multiplicando por 4

$$v = 4t$$

$$dv = 4\,dt$$

1 Se calcula la diferencial de v.

Una vez que hemos completado la diferencial, procedemos a aplicar la fórmula de integración correspondiente:

$$\int Sen\,v\,dv = -Cos\,v + C$$

$$\frac{1}{4}\int Sen\,4t\;\,4\,dt = \boxed{-\frac{1}{4}Cos\,4t + C}$$

Comprobemos por diferenciación:

$$d(Cos\,v) = -Sen\,v\,dv$$

$$d\left[-\frac{1}{4}Cos\,4t + C\right] = -\frac{1}{4}(-Sen\,4t)\,d(4t) = \frac{1}{\cancel{4}}Sen\,\cancel{4}t\;4\,dt$$

$$\boxed{= Sen\,4t\,dt}$$

Ejemplo 2: Resuelve la integral:

$$\int Sec^2 \frac{4}{5} w\, dw =$$

Evidentemente se trata de un caso particular de la fórmula de integración nÚmero 10:

$$\int Sec^2 v\, dv = Tg\, v + C$$

Verifiquemos si la diferencial está completa:

$$\int Sec^2 \frac{4}{5} w\, dw =$$

$$v = \frac{4}{5} w \therefore dv = \frac{4}{5} dw$$

El coeficiente $\frac{4}{5}$ es necesario para completar la diferencial, así que multiplicamos por esa cantidad la diferencial y compensamos con la operación inversa fuera de la integral:

3 Se compensan los cambios aplicando la operación inversa que se empleó al completar.

$$\frac{5}{4} \int Sec^2 \frac{4}{5} w \left(\frac{4}{5} dw\right) \checkmark$$

$$v = \frac{4}{5} w$$

$$dv = \frac{4}{5} dw$$

2 Completamos la integral multiplicando por $\frac{4}{5}$

1 Se calcula la diferencial de v.

Una vez que hemos completado la diferencial, procedemos a aplicar la fórmula de integración correspondiente:

$$\int Sec^2 v\, dv = Tg\, v + C$$

$$\frac{5}{4} \int Sec^2 \frac{4}{5} w \quad \frac{4}{5} dw = \boxed{\frac{5}{4} Tg\, \frac{4}{5} w\ + C}$$

Comprobemos por diferenciación:

$$d(Tg\, v) = Sec^2\, v\, dv$$

$$d\left[\frac{5}{4} Tg\, \frac{4}{5} w\ + C\right] = \frac{5}{4} Sec^2\, \frac{4}{5} w\, d\left(\frac{4}{5} w\right) = \frac{5}{\cancel{4}} Sec^2\, \frac{4}{5} w \frac{\cancel{4}}{\cancel{5}} dw$$

$$\boxed{= Sec^2\, \frac{4}{5} w\ \ dw}$$

Actividades de Desarrollo

En los siguientes casos, calcula la diferencial dv e indica qué operación debe realizarse para completar la diferencial y balancear cada integral:

Integral	Relación v y dv	Integral completa
$\int Cos\,(2x+1)\,x\,dx$	$v =$ $dv =$	$[\quad]\int Cos\,(2x+1)[\quad]\,x\,dx$
$\int xTg\,(x^2+a)\,dx$	$v =$ $dv =$	$[\quad]\int Tg\,(x^2+a)\,[\quad]x\,dx$
$\int Csc^2\,\frac{a}{b}x\,dx$	$v =$ $dv =$	$[\quad]\int Csc^2\,\frac{a}{b}x[\quad]\,dx$
$\int Sec\frac{1}{2}y\,dy$	$v =$ $dv =$	$[\quad]\int Sec\frac{1}{2}y[\quad]\,dy$
$\int Csc\,\sqrt{x}\frac{dx}{\sqrt{x}}$	$v =$ $dv =$	$[\quad]\int Csc\,\sqrt{x}[\quad]\,\frac{dx}{\sqrt{x}}$
$\int e^h Ctg\,e^h\,dh$	$v =$ $dv =$	$[\quad]\int e^h Ctg\,e^h[\quad]\,dh$
$\int 3x\,Sen\,x^2 dx$	$v =$ $dv =$	$[\quad]\int 3x\,Sen\,x^2[\quad]\,dx$

Actividades de Cierre

1. Con base en los avances que obtuviste en la actividad anterior, resuelve las siguientes integrales. Comprueba tus resultados por diferenciación:

a) $\int Cos\ (2x + 1)\ x\ dx$=

b) $\int xTg\ (x^2 + a)\ dx =$

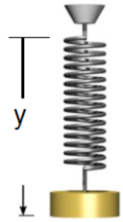
c) $\int Csc^2\ \frac{a}{b} x\ dx =$

d) $\int Sec \frac{1}{2} y\ dy =$

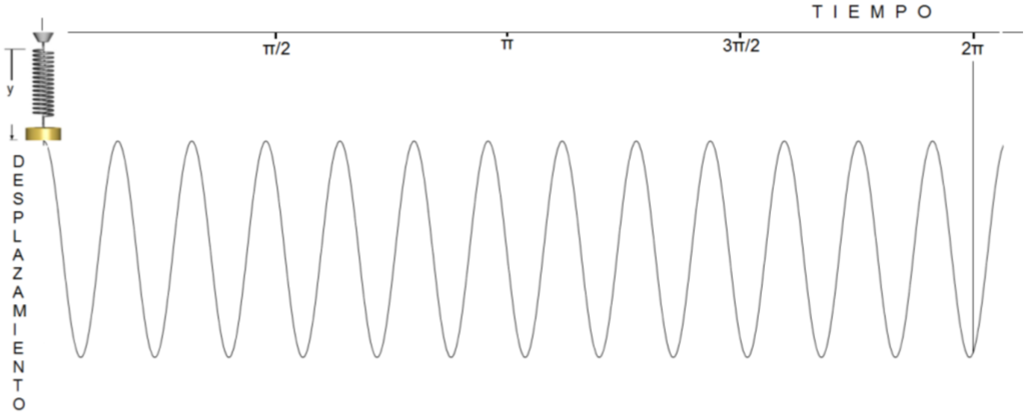
e) $\int Csc\ \sqrt{x}\ \frac{dx}{\sqrt{x}} =$

Actividades de Contextualización o Transversalidad

1. Un resorte suspendido en el techo sostiene una masa, la cual oscila verticalmente. En un momento dado, la aceleración de la masa está dada por $a = -16\pi^3 Cos\ 4\pi\ (t - 2)$; calcula la posición "$y$" de la masa sabiendo que para $t = 0$, $v = 0$ y $posición = 0$.



A continuación, se muestra la gráfica de desplazamiento en el tiempo:



Como ya te habrás dado cuenta, la primera derivada de la distancia (o desplazamiento) respecto al tiempo "es la velocidad", y la segunda derivada de la distancia respecto al tiempo, corresponde a la aceleración; está relación se establece de tal forma que, en orden inverso, sí se cuenta con la función aceleración; la integral de la aceleración respecto al tiempo, corresponde a la velocidad en un instante dado; y de igual modo, la integral de la velocidad respecto al tiempo, corresponde al desplazamiento; ahora que has recordado estas relaciones, ya puedes resolver la situación problema. Claramente tendrás que calcular la integral de la función de aceleración para llegar a la función velocidad y luego integrar la función velocidad, para establecer la función posición.

A continuación, se indica cómo se aborda esta integral a fin de que puedas replicar los procedimientos cuando sea necesario, observarás que surge la necesidad de integrar la función trigonométrica Coseno, todas las integrales trigonométricas directas se indican en el apartado siguiente, sin embargo, de momento aquí observarás que la integral de $\int Cos\ v\ dv = Sen\ v + C$ y que, $\int Sen\ v\ dv = -Cos\ v + C$, por lo tanto:

$$v = \int a\, dt = -\, 16\pi^3 \int Cos\ 4\pi\ (t-2)\, dt$$

completando la diferencial dv, se obtiene:

$$v = -\ 4\,\pi^2\ Sen\ 4\pi\ (t-2) + C$$

Se sabe que $v = 0$ en $t = 0$, evaluando la integral indefinida bajo esta condición, se encuentra $C = 0$, por lo tanto: $v = -\ 4\,\pi^2\ Sen\ 4\pi\ (t-2)$, para determinar la posición "y" se procede a integrar la función velocidad:

$$y = \int -\ 4\,\pi^2\ Sen\ 4\pi\ (t-2)\, dt$$

Completando el diferencial dv, se obtiene:

$$y = \pi\ Cos\ 4\pi\ (t-2) + C$$

se sabe que $d = 0$ en $t = 0$, evaluando la integral indefinida bajo esta condición, se encuentra $C = \pi$

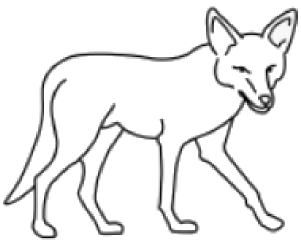
Por lo tanto:

$$y = \pi\ Cos\ 4\,\pi\ (t-2) -\ \pi$$

lo cual, permite obtener la posición de la masa sostenida por el resorte, para cualquier tiempo "t" dado.

Utilizando los conocimientos obtenidos del ejemplo anterior, resuelve la siguiente situación problema.

2. Cuando dos especies interactúan en una relación depredador/presa, las poblaciones de ambas especies tienden a variar en forma sinusoidal. En un estudio, en una localidad habitada por Coyotes, cuyo principal alimento son conejos de campo, se registró la población promedio anual de Coyotes durante 13 años, el modelo matemático señala que la velocidad de reproducción en un momento determinado estaba dada por:



$N(t) = 240\,\pi^2\ Cos\ 8\pi\ (t-1)$. Se sabe que en un tiempo inicial $t = 1$, el número de Coyotes era de 50, $[N(1) = 50]$.

Determina: ¿Cuántos Coyotes se espera que haya en el décimo año?

Ejercicios Adicionales

Calcula las siguientes integrales y verifica que los resultados sean los indicados:

a) $\int Sen\ x\ dx = -Cos\ x + C$

b) $\int \frac{7}{5} Sen\ 5x\ dx = -\frac{7}{25} Cos\ 5x + C$

c) $\int Sen\ (7x+1)\ dx = -\frac{1}{7} Cos\ (7x+1) + C$

d) $\int 90\ Cos\ \left(\frac{30}{7}x + 20\right) dx = 21\ Sen\ \left(\frac{30}{7}x + 20\right) + C$

e) $\int (12\ Cos\ x + 5\ Sen\ x) dx = 12\ Sen\ x - 5\ Cos\ x + C$

f) $\int 9\,Tg(3+9x)\ dx = ln\,Sec(3+9x) + C$

g) $\int Tg\ 3x\ \ dx = \frac{1}{3} ln\,Sec\ 3x + C$

h) $\int 5\,Ctg(5x-3)\ dx = ln\,Sen(5x-3) + C$

i) $\int Ctg\ (10x-6)\ \ dx = \frac{1}{10} ln\,Sen\ \ (10x-6) + C$

j) $\int 14\ Ctg\ (7x+21)\ dx = 2\ ln\,Sen(7x+21) + C$

k) $\int x\ Csc(3x^2)\ dx = \frac{1}{6}\ln|Csc\ 3x^2 - Ctg\ 3x^2| + C$

l) $\int Csc(9x)\ dx = \frac{1}{9} ln|Csc\ 9x - Ctg\ 9x| + C$

2.6. Integración de diferenciales racionales con denominador de la forma $a2 \pm v2$ y $v2 - a2$.

Introducción

Una de las alternativas que existen para resolver integrales cuando es imposible hacerlo por medio de las fórmulas 4 o 5, son precisamente las que te presentamos en este apartado. Todas tienen en común sumas o diferencias de cuadrados de la forma $a^2 \pm v^2$ o $v^2 - a^2$.

Actividades de Apertura

Para integrar las diferenciales trigonométricas se emplean las formulas inmediatas:

$$18.\ \int \frac{dv}{v^2 + a^2} = \frac{1}{a} arcTg \frac{v}{a} + C$$

$$19.\ \int \frac{dv}{v^2 - a^2} = \frac{1}{2a}\, ln \frac{v - a}{v + a} + C$$

$$19a.\ \int \frac{dv}{a^2 - v^2} = \frac{1}{2a}\, ln \frac{a + v}{a - v} + C$$

$$20.\ \int \frac{dv}{\sqrt{a^2 - v^2}} = arcSen \frac{v}{a} + C$$

$$21.\ \int \frac{dv}{\sqrt{v^2 \pm a^2}} = \ln\left(v + \sqrt{v^2 \pm a^2}\right) + C$$

Para plantear cada problema, debemos distinguir entre dos elementos importantes que contiene cada fórmula que vamos a aplicar: v se refiere a una variable y a representa una constante absoluta o arbitraria. El resto del procedimiento es similar a la aplicación de las fórmulas anteriores en cuanto a que se debe tener la precaución de verificar que la expresión diferencial esté completa antes de aplicar la fórmula correspondiente.

Analiza los siguientes ejemplos.

Ejemplo 1: Resuelve la integral:

$$\int \frac{2\,dx}{9x^2+4}$$

Nota que se trata de un caso particular de la fórmula de integración número 18:

$$18.\int \frac{dv}{v^2+a^2} = \frac{1}{a} arcTg\frac{v}{a} + C$$

En primer lugar, identifiquemos los elementos importantes y verifiquemos si la diferencial está completa:

$$\int \frac{2\,dx}{9x^2+4}$$

$$v^2 = 9x^2$$
$$v = 3x$$
$$dv = 3dx$$

$$a^2 = 4$$
$$a = 2$$

Observa que en este caso, la diferencial no está completa pues $\boldsymbol{v}$ y $\boldsymbol{dv}$ no se corresponden. Es necesario, para completar la diferencial, multiplicar por 3 y luego compensar con la operación inversa como lo hemos realizado anteriormente:

3 Se compensan los cambios aplicando la operación inversa que se empleó al completar.

$$\frac{2}{3}\int \frac{3\,dx}{9x^2+4}$$

$$v = 3x$$
$$dv = 3\,dx$$

1 Se calcula la diferencial de $\boldsymbol{v}$.

2 Completamos la integral multiplicando por 3 y sacamos el 2 de la integral.

Una vez que hemos completado la diferencial, procedemos a aplicar la fórmula de integración correspondiente:

$$\int \frac{dv}{v^2+a^2} = \frac{1}{a} arcTg\frac{v}{a} + C$$

$$\frac{2}{3}\int \frac{3\,dx}{9x^2+4} = \frac{2}{3}\frac{1}{2} arcTg\frac{3x}{2} + C = \boxed{\frac{1}{3} arcTg\frac{3x}{2} + C}$$

Comprobemos por diferenciación:

$$d(arctg\ v) = \frac{dv}{1+v^2}$$

$$d\left[\frac{1}{3}arcTg\frac{3x}{2}+C\right] = \frac{1}{3}\,\frac{d\left(\frac{3x}{2}\right)}{\frac{1}{1}+\left(\frac{3x}{2}\right)^2} = \frac{1}{3}\,\frac{\frac{3\,dx}{2}}{\frac{4+9x^2}{4}} = \frac{4}{3}\,\frac{3\,dx}{(2)(4+9x^2)}$$

$$= \frac{\cancel{12}\,dx}{(\cancel{6})(4+9x^2)} = \frac{2\,dx}{4+9x^2} = \boxed{\frac{2\,dx}{9x^2+4}}$$

Ejemplo 2: Resuelve la integral:

$$\int \frac{2\,dx}{5x^2-3}$$

Nota que se trata de un caso particular de la fórmula de integración número 19:

$$19. \int \frac{dv}{v^2-a^2} = \frac{1}{2a}\,ln\frac{v-a}{v+a}+C$$

En primer lugar, identifiquemos los elementos importantes y verifiquemos si la diferencial está completa:

$$\int \frac{dx}{5x^2-3}$$

$$v^2 = 5x^2$$

$$v = \sqrt{5}x$$

$$dv = \sqrt{5}dx$$

$$a^2 = 3$$

$$a = \sqrt{3}$$

Observa que en este caso, la diferencial no está completa pues v y dv no se corresponden. Es necesario para completar la diferencial multiplicar por $\sqrt{5}$ y luego compensar con la operación inversa.

3 Se compensan los cambios aplicando la operación inversa que se empleó al completar.

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{\sqrt{5}dx}{5x^2-3}$$

2 Completamos la integral multiplicando por $\sqrt{5}$

$$v=\sqrt{5}x$$

$$dv=\sqrt{5}dx$$

1 Se calcula la diferencial de $\boldsymbol{v}$.

Una vez que hemos completado la diferencial, procedemos a aplicar la fórmula de integración correspondiente:

$$\int \frac{dv}{v^2-a^2}=\frac{1}{2a}ln\frac{v-a}{v+a}+C$$

$$\frac{1}{\sqrt{5}}\int \frac{\sqrt{5}\,dx}{5x^2-3}=\frac{1}{\sqrt{5}}\,\frac{1}{2\sqrt{3}}\,ln\frac{\sqrt{5}x-\sqrt{3}}{\sqrt{5}x+\sqrt{3}}+C$$

$$=\frac{1}{2\sqrt{3}\sqrt{5}}\,ln\frac{\sqrt{5}x-\sqrt{3}}{\sqrt{5}x+\sqrt{3}}+C$$

Comprobemos por diferenciación:

$$d\left[\frac{1}{2\sqrt{3}\sqrt{5}}\,ln\frac{\sqrt{5}x-\sqrt{3}}{\sqrt{5}x+\sqrt{3}}+C\right]=$$

Como aprendiste en Cálculo diferencial, algunas expresiones logarítmicas pueden descomponerse en otras equivalentes que son más sencillas de diferenciar:

Apliquemos la propiedad:

$$ln\frac{A}{B}=\ln A-\ln B$$

$$d\left\{\frac{1}{2\sqrt{5}\sqrt{3}}\left[ln\left(\sqrt{5}x-\sqrt{3}\right)-ln\left(\sqrt{5}x+\sqrt{3}\right)\right]+C\right\}$$

Aplicando la fórmula de diferenciación para logaritmos naturales:

$$d(\ln v) = \frac{dv}{v}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{5}\sqrt{3}}\left[\frac{d(\sqrt{5}x-\sqrt{3})}{\sqrt{5}x-\sqrt{3}} - \frac{d(\sqrt{5}x+\sqrt{3})}{\sqrt{5}x+\sqrt{3}}\right] = \frac{1}{2\sqrt{5\sqrt{3}}}\left[\frac{\sqrt{5}dx}{\sqrt{5}x-\sqrt{3}} - \frac{\sqrt{5}dx}{\sqrt{5}x+\sqrt{3}}\right] =$$

$$= \frac{\sqrt{5}dx}{2\sqrt{5}\sqrt{3}}\left[\frac{1}{\sqrt{5}x-\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{5}x+\sqrt{3}}\right] = \frac{\sqrt{5}dx}{2\sqrt{5\sqrt{3}}}\left[\frac{(\sqrt{5}x+\sqrt{3})-\sqrt{5}x-\sqrt{3}}{(\sqrt{5}x-\sqrt{3})(\sqrt{5}x+\sqrt{3})}\right]$$

$$= \frac{\sqrt{5}dx}{2\sqrt{5}\sqrt{3}}\left[\frac{\sqrt{5}\cancel{x}+\sqrt{3}-\sqrt{5}\cancel{x}+\sqrt{3}}{\cancel{(}\sqrt{5}x-\sqrt{3})\cancel{(}\sqrt{5}x+\sqrt{3})}\right] = \frac{dx}{\cancel{2\sqrt{3}}}\left[\frac{2\cancel{\sqrt{3}}}{5x^2-3}\right] = \boxed{\frac{dx}{5x^2-3}}$$

Actividades de Desarrollo

En los siguientes casos, calcula la diferencial dv e indica qué operación debe realizarse para completar la diferencial de cada integral:

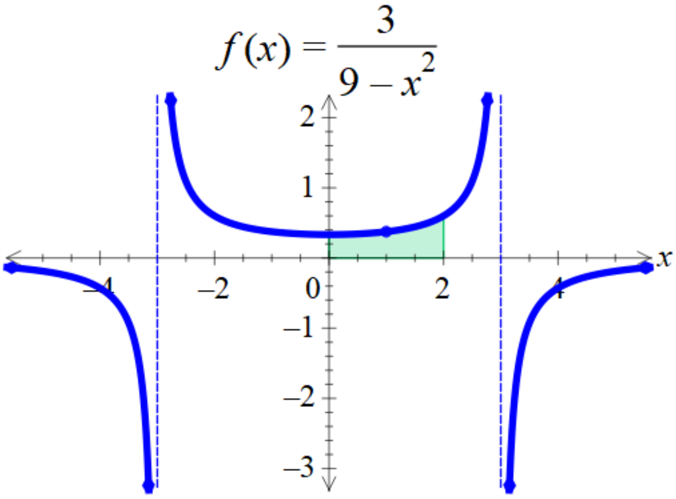
Integral	Relación v y dv	Integral completa
$\int \frac{dx}{4x^2+9}$	$v^2 =$ $a^2 =$ $v =$ $a =$ $dv =$	$[\quad]\int \frac{[\quad]\,dx}{4x^2+9}$
$\int \frac{3\,dy}{16y^2-25}$	$v^2 =$ $a^2 =$ $v =$ $a =$ $dv =$	$[\quad]\int \frac{[\quad]\,dy}{16y^2-25}$
$\int \frac{2\,dr}{\sqrt{9r^2+4}}$	$v^2 =$ $a^2 =$ $v =$ $a =$ $dv =$	$[\quad]\int \frac{[\quad]\,dr}{\sqrt{9r^2+4}}$
$\int \frac{5\,dw}{36-4w^2}$	$v^2 =$ $a^2 =$ $v =$ $a =$ $dv =$	$[\quad]\int \frac{[\quad]\,dw}{36-4w^2}$
$\int \frac{2\,dx}{\sqrt{4-9x^2}}$	$v^2 =$ $a^2 =$ $v =$ $a =$ $dv =$	$[\quad]\int \frac{[\quad]\,dx}{\sqrt{4-9x^2}}$
$\int \frac{7\,dx}{x^2-2}$	$v^2 =$ $a^2 =$ $v =$ $a =$ $dv =$	$[\quad]\int \frac{dx}{x^2-2}$

El dominio en la resolución de este tipo de integrales, también nos permite calcular áreas bajo curvas con estas características.

Ejemplo 1: Determina el área limitada por el eje x, la curva:

$$f(x) = \frac{3}{9 - x^2}$$

y las rectas: $$x = 0,\ x = 2$$



Solución:

En la gráfica se muestra la región del área que se quiere conocer, entonces aplicamos el Teorema Fundamental del Cálculo:

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_0^2 \frac{3}{9 - x^2}\,dx$$

Aplicamos la fórmula 19a, y se obtiene:

$$\int_0^2 \frac{3}{9 - x^2}\,dx = 3\frac{1}{2(3)}\ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right|\Bigg|_0^2 = \frac{1}{2}\ln\left|\frac{3+x}{3-x}\right|\Bigg|_0^2 = \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{3+2}{3-2}\right| - \ln\left|\frac{3+0}{3-0}\right|\right)$$

$$= \frac{1}{2}\left(\ln\left|\frac{5}{1}\right| - \ln\left|\frac{3}{3}\right|\right) = \frac{1}{2}(\ln|5| - \ln|1|) = \frac{1}{2}\ln|5| \cong 0.804$$

Entonces obtenemos el área de la región, resulta ser aproximadamente a $\mathbf{0.804\ u^2}$

Actividades de Cierre

1. Con base en los avances que obtuviste en la actividad anterior, resuelve las siguientes integrales. Comprueba tus resultados por diferenciación:

a) $\int \frac{2\,dx}{\sqrt{4-9x^2}}$

b) $\int \frac{5\,dw}{36-4w^2}$

c) $\int \frac{2\,dr}{\sqrt{9r^2+4}}$

Ejercicios Adicionales

1. Calcula las siguientes integrales y verifica que los resultados sean los indicados:

a) $\int \frac{dx}{3+2x^2}$

b) $\int \frac{dx}{\sqrt{3+2x^2}}$

c) $\int \frac{dx}{3-2x^2}$

d) $\int \frac{dx}{2x^2-3}$

e) $\int \frac{dx}{\sqrt{2x^2-3}}$

f) $\int \frac{dx}{\sqrt{3-2x^2}}$

Bibliografía

Coronado, R. M., Jiménez, M. R. (2019).*Cálculo Integral*. Pearson.

Puesto, M.,G.,(2009). *Elementos de cálculo integral*. México: Limusa.

Cuéllar, J.A. (2008).*Matemáticas VI, Cálculo Integral*. Mc Graw Hill.

Engler, A.,(2007). *El cálculo integral*. Santa Fe, Argentina: Universidad Nacional del Litoral.

Escobedo A. (2016).*Cálculo Integral*.Edelvives.

Flores. E., R., (2008). *Fundamentos del cálculo*. Hermosillo, Sonora: Garabatos.

González, U., Pedro, M.,(2008). *Arquímedes y los orígenes del cálculo integral*. Madrid: Nivola.

Leitholf,L.,(1999). El Cálculo. México. Ed. Oxford University Press

Lezama, M.F. (2004). *Cálculo integral*. México D.F. FCE.DGETI. SEP

Márquez, A.A. (2010). *Cálculo integral. México*.CONAMAT. Pearson.

Piskunov, N. S. (2014). *Cálculo diferencial e integral*. México: Limusa.

Olvera, G.B. (2001). *Cálculo Integral*. México D.F. FCE.DGETI. SEP.

Ordoño, V.H. (2007). *Cálculo integral*. México D.F. FCE.DGETI. SEP.

Salazar. G.L. (2019). *Cálculo Integral*. México. Patria.

Stewart, J., Redlin, I., Watson,S., (2001). *Precálculo*.México. Ed. Thomson Learning.

Swokowski, E. W. (1993). *Cálculo con Geometría Analítica*. México.Ed. Iberoamérica.

Vega, M. (2018).*Cálculo Integral*.Colección DGETI.

Directorio

Dr. Rafael Sánchez Andrade

Jefe de la Unidad de Educación Media Superior Tecnológica Industrial y de Servicios

Ing. Luis Miguel Rodríguez Barquet

Director Académico de Innovación Educativa

Mtra. Laura Leal Sorcia

Subdirectora de Innovación Académica

MC Gerardo Valdés Bermudes

Presidente de la Academia Nacional de Matemáticas de la DGETI

MC Luis Manuel Guerra Franco

Secretario de la Academia Nacional de Matemáticas de la DGETI

MC Gerardo Valdés Bermudes

Coordinador de la Mesa de trabajo de Cálculo Integral

MC Gerardo Valdés Bermudes
ME Omar Eduardo De la Torre Aldama
ING. Norma Patricia Hernández Tamez

Edición de la obra

Academia Nacional de Matemáticas

Integrantes de la Academia Nacional de Matemáticas que participaron en la elaboración de esta obra

Nombre	Plantel	Estado
Juan Carlos Díaz Puga	CBTIS 39	Aguascalientes
José Antonio Hirata Moyeda	CBTIS 140	Baja California
Roberto Estrada Quiles	CETIS 18	Baja California
José Luis Colorado Betanzos	CBTIS 69	Baja California Sur
Raúl Toledo Escobar	CBTIS 62	Baja California Sur
Ana María García Zúñiga	CETIS 2	CD. de México
Yolanda Escalante Heredia	CBTIS 126	Campeche
Yudibeth Sánchez Castellanos	CETIS 138	Chiapas
Miguel Ángel Peña Ogaz	CBTIS 228	Chihuahua
Omar Eduardo De la Torre Aldama	CETIS 83	Coahuila
Marcos Belisario González Loria	CBTIS 160	Estado de México
David Fernando López López	CBTIS 172	Guanajuato
Jesús Eugenio Ruiz Flores	CBTIS 60	Guanajuato
Emilio Jaime Mendoza Gómez	CBTIS 199	Hidalgo
Eliseo Santoyo Teyes	CBTIS 226	Jalisco
Andrea Casillas Macías	CBTIS 94	Michoacán
Oscar Villalpando Barragán	CBTIS 12	Michoacán
Luis Manuel Guerra Franco	CBTIS 76	Morelos
Eva Cruz Brena	CBTIS 183	Oaxaca
Nidia Dolores Uribe Olivares	CBTIS 100	Nayarit
Julio Alberto González Negrete	CBTIS 86	Puebla
Gerardo Valdés Bermudes	CBTIS 224	Sinaloa
Martín Vega Gómez	CETIS 128	Sonora
Eva María Sánchez Luna	CBTIS 249	Tabasco
Norma Patricia Hernández Tamez	CBTIS 007	Tamaulipas
Miguel Constantino Hernández Pérez	CETIS 132	Tlaxcala
Miguel Ángel Pavón Cordero	CBTIS 48	Veracruz
Silvia Leonor Martínez Quijano	CBTIS 80	Yucatán
Efraín Reyes Cumplido	CBTIS 104	Zacatecas